PRIJS f 2,—.

ARTPROJECTIES BESCHOUWD UIT EEN HYDROGRAPHISCH OOGPUNT

DOOR J. L. H. LUYMES,

CHEF DER AFDEELING HYDROGRAPHIE
VAN HET MINISTERIE VAN MARINE.



UITGEGEVEN VOOR REKENING VAN
HET MINISTERIE VAN MARINE.

'S-GRAVENHAGE — ALGEMEENE LANDSDRUKKERIJ — 1924.

KAARTPROJECTIES BESCHOUWD UIT EEN HYDROGRAPHISCH OOGPUNT

DOOR J. L. H. LUYMES,
CHEF DER AFDEELING HYDROGRAPHIE
VAN HET MINISTERIE VAN MARINE.



UITGEGEVEN VOOR REKENING VAN
HET MINISTERIE VAN MARINE.

'S-GRAVENHAGE — ALGEMEENE LANDSDRUKKERIJ — 1924.

VOORBERICHT.

In deze studie is de kaartprojectieleer volgens de nieuwere begrippen behandeld, voor zoover deze leer in uitgebreiden zin voor den hydrograaf en den zeeman van belang geacht wordt. Teneinde duidelijk te doen uitkomen op welke wijze projecties op hunne eigenschappen onderzocht en andere ontworpen worden, welke aan bepaalde eigenschappen voldoen, kon daarbij niet volstaan worden met uitsluitend de methoden te behandelen, die bij de hydrographische opnemingen en voor de zeekaarten gebruikt worden. Vooral is ingegaan op de projecties, welke voor de Nederlandsche zeekaarten worden toegepast en daarbij is in het bijzonder de scheeve stereographische projectie beschouwd, welke voor de nieuwe zeekaarten van de Nederlandsche zeegaten is ingevoerd.

Tenslotte is van de door den Topographischen Dienst in Nederlandsch-Indië gebruikte polyeder-projectie medegedeeld, hetgeen de hydrographische opnemer in die gewesten daarvan noodzakelijk weten moet.

De gebruikte bronnen zijn:

M. A. Tissot, „Memoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques", voor de ontwikkeling der formules van vervorming;

Dr. K. Zoppritz en Dr. A. Bludeau, „Leitfaden der kartenentwurfslehre", dat vrij gevolgd is bij de behandeling van een groot gedeelte der projectiemethoden;

Prof. Hk. J. Heuvelink, „De stereographische kaartprojecties in hare toepassing bij de Rijksdriehoeksmeting", waaraan gedeeltelijk de behandeling der stereographische projectie is ontleend;

J. van Roon, „Een en ander over kaartprojecties", voor het medegedeelde over de polyeder-projectie.

INHOUD.

INLEIDING.

Kaarten zijn verkleinde afbeeldingen van het oppervlak der aarde, of van een gedeelte daarvan, op een plat vlak. Is het gedeelte dat men afbeelden wil zoo weinig uitgestrekt, dat het als plat beschouwd mag worden, zonder dat dit tot merkbare fouten leidt, dan kan de kaart wat de projectie aangaat als een eenvoudige verkleining worden vervaardigd. Betreft het echter een grooter gedeelte der aarde, waarbij de kromming van het oppervlak niet langer verwaarloosd mag worden, dan doet zich de moeielijkheid voor, dat het niet mogelijk is een vlak van dubbele kromming zoodanig op een plat vlak af te beelden, dat alle deelen der teekening in verkleinde mate volkomen met het oorspronkelijke overeenstemmen. Men zal alsdan genoegen moeten nemen met benaderde voorstellingen, waarin onvermijdelijk fouten voorkomen. De groote waarde steeds door de menschheid gehecht aan nauwkeurige kaarten, heeft er toe geleid dat sinds eeuwen tal van geleerden getracht hebben deze voorstellingen zoo juist mogelijk te maken, dus de onvermijdelijke fouten terug te brengen tot geringe bedragen, wier invloeden zoo weinig mogelijk storen en waarvan de grootten bekend zijn. Deze onderzoekingen hebben geleid tot het bestaan van een zelfstandige wetenschap, bekend als de kaartprojectieleer.

Wordt voor de afbeelding groote nauwkeurigheid als eisch gesteld, dan mag de afwijking der aarde van den bolvorm niet verwaarloosd worden. Aangezien de bolvorm zich echter beter tot afbeelding op een plat vlak leent dan de ellipsoïde, met welke wiskundige figuur de vorm der aarde het meest overeenstemt, wordt daarbij gewoonlijk het af te beelden terrein eerst op een bol geprojecteerd en vervolgens van den bol overgebracht op het platte vlak. In deze studie zal enkel de laatste overbrenging beschouwd worden, alhoewel bij de constructie van een kaartnet met de afwijking der aarde van den bolvorm rekening wordt gehouden.

Elk punt van het deel der aardoppervlakte, dat men wil afbeelden, op het platte vlak te projecteeren, zou zeer bezwarend en tijdroovend zijn, doch daar de horizontale ligging van elk punt op aarde bepaald is door de geographische lengte en breedte en deze beide coördinaten op het stelsel van parallellen en meridianen berusten, kan volstaan worden met de projectie van het net dezer cirkels. De aardsche punten worden vervolgens op den grondslag van dit net in kaart gebracht.

Bij een geheel juiste afbeelding, zooals op een globe vervaardigd kan worden, zullen alle richtingen, afstanden en oppervlakken — voorzoover de beide laatste betreft op schaal — volkomen nauwkeurig zijn weergegeven. Men drukt dit uit door te zeggen, dat de afbeelding hoekgelijkheid, lengtegelijkheid en oppervlakgelijkheid bezit òf, zooals de gebruikelijke

vreemde uitdrukkingen luiden, voldoet aan de eischen van conformiteit, equidistantie en equivalentie. Een kaart zal echter, zooals later zal blijken, slechts aan één dezer drie eischen kunnen voldoen; zij kan alleen òf hoekgelijkheid, òf lengtegelijkheid òf oppervlakgelijkheid bezitten en voorzoover de beide eerste gelijkheden betreft, nog slechts in beperkte mate.

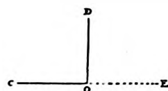
De meer of mindere volkomenheid eener projectie en de geschiktheid voor het beoogde doel, kunnen worden beoordeeld door na te gaan in welke mate zij voldoet aan de genoemde eischen. De projectie-methoden, welke zijn uitgedacht, hebben dan ook ten doel, hetzij aan een dezer eischen te voldoen en de afwijkingen ten opzichte der beide andere zooveel mogelijk te beperken, hetzij de afwijkingen van twee dezer eischen zoo klein mogelijk te houden, zonder dat de afwijkingen ten opzichte van den derden te veel invloed krijgen. Van het doel dat met de kaart beoogd wordt, zal het afhangen welken eisch of eischen vooropgesteld worden. Aangezien vele combinaties mogelijk zijn, vooral als men tevens rekening houdt met de meer of mindere gemakkelijkheid der constructie van het net, is het begrijpelijk dat in den loop der eeuwen een groot aantal projectie-methoden zijn uitgedacht en aanbevolen.

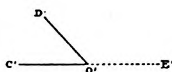
Voor beoordeeling dezer methoden is het noodig, dat de kenmerken en afwijkingen der hoek-, lengte- en oppervlakgelijkheden in formules zijn neergelegd, zóó dat nagegaan kan worden of een bepaalde projectie aan één dezer kenmerken voldoet, dan wel de afwijkingen berekend kunnen worden. Ook kunnen de formules gebruikt worden om projecties te ontwerpen, welke aan vooropgestelde eischen voldoen.

Verklaard zal worden hoe deze formules zijn afgeleid; vervolgens zullen de voornaamste en meest bekende projectie-methoden in het kort behandeld worden en ten slotte zullen de projectie-methoden, meer bepaaldelijk voor de zeevaart van belang, uitvoeriger worden beschouwd. Aan de hand der uitkomsten van de berekeningen der onvermijdelijke fouten zal, in verband met het doel door zeekaarten beoogd, worden nagegaan aan welke projecties voor deze kaarten de voorkeur moet worden geschonken.

VERVORMING.

Zij aan een willekeurig punt O op aarde een stel loodrecht op elkaar staande raaklijnen CO en OD getrokken. Stel dat deze raaklijnen door een willekeurige projectie-methode, waardoor de richtingen veranderd worden, afgebeeld worden als C_1O_1 en O_1D_1, snijdende onder den scherpen hoek $C_1O_1D_1$. Wordt het stel raaklijnen gedraaid, zóó dat CO langs OD valt en OD in de richting OE, dan zal de afbeelding $D_1O_1E_1$ zijn. De snijdingshoek is van scherp, stomp geworden en zal dus op een bepaald oogenblik recht geweest zijn. Bij elke dergelijke methode van projectie bestaat dus voor elk punt van den bol een stel loodrecht op elkaar staande raaklijnen, waarvan de afbeelding eveneens loodrecht op elkaar staat.





Deze raaklijnen worden eerste en tweede hoofdraaklijn genoemd.

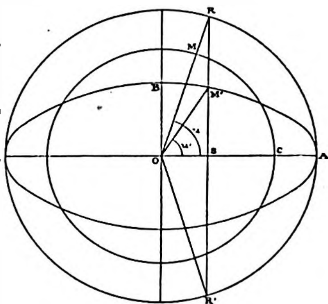
Zij verder rond het punt O een cirkel met oneindig kleinen straal getrokken, dan zal de afbeelding van dezen cirkel op een plat of ontwikkelbaar vlak in het algemeen een ellips zijn en elk punt der aarde gelegen op den cirkel zal weergegeven worden door een punt der ellips. Alle stralen van den cirkel zullen voorgesteld worden door voerstralen der ellips. De afbeelding van een loodrecht op elkander staand stel middellijnen van den cirkel zal weergegeven worden door een stel geconjugeerde middellijnen der ellips, dat is een zoodanig stel dat de eene middellijn, lijnen evenwijdig aan de andere, midden door deelt. Immers alleen dan zal in dit opzicht overeenstemming met den cirkel bestaan. Aangezien van de mogelijke stellen geconjugeerde middellijnen enkel dat van groote en kleine as loodrecht op elkaar staat, zal het stel hoofdraaklijnen door de beide assen van de ellips worden weergegeven.

Van het bovenstaande is uitgegaan om de elementen te vinden en in formules neer te leggen, welke toelaten een oordeel te vormen over de vervormingen, die verschillende projecties de afbeelding van het aardoppervlak doen ondergaan. Bedoelde ellips wordt uit dien hoofde de ellips van vervorming genoemd.

Bij de navolgende beschouwing is vooropgesteld, dat de afbeelding op ware grootte plaats heeft. Verder wordt de straal van den cirkel als eenheid aangenomen; de halve groote as der ellips a genoemd en de halve kleine as b.

De middelpuntsvergelijking der ellips is $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; die van den cirkel met straal a kan geschreven worden $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

Uit deze vergelijkingen volgt de eigenschap der ellips: dat bij gelijke abscissen de ordinaten van punten der omtrekken van den omgeschreven cirkel en der ellips zich verhouden als de halve groote as tot de halve kleine. Uit deze eigenschap vloeit de bekende constructie der ellips voort door ordinaten van den omschreven cirkel te verkleinen in reden van b tot a.



Stel dat de ellips van vervorming met het middelpunt gelegd wordt op dat van den op aarde getrokken cirkel, zoodanig dat de groote en kleine as langs de hoofdraaklijnen vallen, dan kan men zich de geleidelijke vervorming rond het punt O ontstaan denken, doordat de straal van den cirkel op het aardoppervlak vergroot is in reden van 1 tot a en de cirkel vervolgens tot een ellips herleid is door alle ordinaten te verkleinen in reden van b tot a.

Voor het punt M op aarde vindt men volgens deze constructie het punt M' der kaart. De ligging van M' hangt dus af van de verhouding der beide halve assen en de grootte van een dezer. Hoe minder beide van de eenheid afwijken, des te kleiner wordt de vervorming.

Is $a = b = 1$ dan valt M' met M samen en treedt geen vervorming op; is $a = b$ doch $< >$ dan 1 dan ligt M' op OM of haar verlengde. Is $b = 0$ dan gaat de ellips over in een rechte lijn.

Hoekvervorming. Tengevolge van de afbeelding van den cirkel door een ellips, wordt de hoek tusschen twee richtingen op aarde binnen den cirkel in het algemeen gewijzigd. De hoek u tusschen den straal OM en de hoofdraaklijn OC wordt in de kaart vervormd tot den hoek u' tusschen den voerstraal OM' en de halve groote as.

$$tg\ u = \frac{RS}{OS} \qquad tg u' = \frac{M'S}{OS} \text{ waaruit } tg\ u' = \frac{b}{a}\ tg\ u.$$

De afbeelding van een scherpen hoek, waarvan een der beenen samenvalt met de eerste hoofdraaklijn, d.i. die welke overeenstemt met de groote as der ellips van vervorming, is dus altijd kleiner dan dien hoek.

Nu is: $\angle ROM' = u - u'$; $\angle R'OM' = u + u'$ en $\angle ORM' = 90^\circ - u$.

Verder heeft men: $RM' : OM' = sin\ (u - u') : sin\ (90^\circ - u)$

$R'M' : OM' = sin\ (u + u') : sin\ (90^\circ - u)$

waaruit volgt: $R'M' : RM' = sin\ (u + u') : sin\ (u - u')$.

Nu is echter $R'M' = R'S + SM'$; $RM' = RS - SM'$ en $SM' = RS\ \frac{b}{a}$.

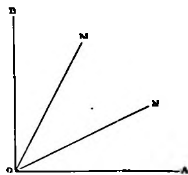
Dus $\frac{R'M'}{RM'} = \frac{sin\ (u + u')}{sin\ (u - u')} = \frac{a + b}{a - b}$ of $sin\ (u - u') = \frac{a - b}{a + b}\ sin\ (u + u')$.

De hoek $u - u'$ is de vervorming, welke de hoek u door de afbeelding ondergaat. Wanneer u aangroeit van 0 tot 90°, neemt $u - u'$ toe van 0 tot een maximum, dat ω genoemd wordt, om daarna weder af te nemen tot nul. De maximum waarde ω wordt bereikt als $u + u' = 90^\circ$ is. Noemt men deze waarden van u en u', U en U', dan is $cot\ U' = tg\ U$ en dus, volgens de boven gevonden vergelijking $tg\ u' = \frac{b}{a}\ tg\ u$:

$$tgU' = \sqrt{\frac{b}{a}} \qquad tgU = \sqrt{\frac{a}{b}} \text{ en verder } sin\ \omega = \frac{a - b}{a + b}.$$

De vervorming is nul voor den hoek gevormd door de hoofdraaklijnen.

Daar van uit OC ook een hoek U naar de andere zijde kan worden afgezet is de grootste waarde, welke de hoekmisvorming bereiken kan $2\ \omega$. Uit $2\ U' = 180 - 2\ U$ volgt, dat de hoek $2\ U$ op aarde in de kaart wordt afgebeeld door zijn supplement. Het maximum kan dus nooit bereikt worden bij een hoekgrootte van 90°, daar het supplement van een rechten hoek eveneens recht is.



De wijziging in afbeelding ondergaan door hoeken, waarvan geen der beenen langs de eerste hoofdraaklijn valt, is te berekenen door deze hoeken te beschouwen als de som of het verschil van twee hoeken, waarbij dit wel het geval is.

Zijn in de figuur OA de eerste hoofdraaklijn en OB de tweede, dan is de vervorming van den hoek MON te berekenen door die van den hoek MOA te verminderen met die van den hoek NOA.

Aangezien de vervorming toeneemt van o tot ω en daarna weer afneemt tot nul, naarmate ON bewogen wordt van OA naar OB, bestaat er steeds, naast elke richting van ON, een andere richting, welke een gelijke vervorming in den hoek met de eerste hoofdraaklijn meebrengt. De tusschen die richtingen ingesloten hoek wordt dus zonder vervorming in de projectie afgebeeld. Deze hoek is nul, wanneer de eerste richting die is, waarbij de grootste vervorming optreedt; hij is 90° wanneer de richtingen langs de beide hoofdraaklijnen vallen.

Lengtevervorming. De lengtevervorming wordt voorgesteld door de verandering van OM op aarde tot OM' in de kaart.

Noemt men $OM' = r$, dan volgt uit de figuur $\cos u = \frac{OS}{a}$ en $\cos u' = \frac{OS}{r}$, eveneens $\sin u = \frac{RS}{a} = \frac{SM'}{b}$ en $\sin u' = \frac{SM'}{r}$ dus:

$$a \cos u = r \cos u' \text{ en } b \sin u = r \sin u'$$

$$\text{waaruit } a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u = r^2$$

Het blijkt dus dat de grootste lengtemisvorming optreedt in de richtingen der hoofdraaklijnen.

Stel de lengteverhouding der afbeelding van den straal in den bolcirkel, welke langs den meridiaan valt, tot dien bolstraal $= h$; die der afbeelding van den straal langs de parallel tot dien bolcirkel $= k$.

Noem verder den hoek door den eersten straal en de eerste hoofdraaklijn gevormd u en zijne afbeelding u'; den hoek tusschen de tweede straal en de eerste hoofdraaklijn u_1 en zijne afbeelding u_1' en eindelijk de vervorming, welke de rechte hoek tusschen den meridiaan en de parallel door de afbeelding ondergaat θ, dan geven de bovenstaande formules:

$$h \cos u' = a \cos u \qquad h \sin u' = b \sin u$$

$$k \cos u_1' = a \cos u_1 \qquad k \sin u_1' = b \sin u_1$$

Nu is $\theta = 90 - (u' + u_1')$ dus $\cos \theta = \sin (u' + u_1') = \sin u' \cos u_1' + \cos u' \sin u_1'$. Vervangt men in deze formule de $\sin$ en $\cos$ in het tweede lid door de waarden uit de formules h en k, dan is:

$$\cos \theta = \frac{b}{h} \sin u \cdot \frac{a}{k} \cos u_1 + \frac{a}{h} \cos u \cdot \frac{b}{k} \sin u_1 =$$

$$\frac{ab}{hk} \sin u \cos u_1 + \frac{ab}{hk} \sin u_1 \cos u \text{ en daar } u + u_1 = 90° \text{ is:}$$

$$ab = hk \cos \theta.$$

In de formule: $r^2 = a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u$, voor r achtereenvolgens h en k invoerende en de uitkomsten bij elkander optellende, volgt:

$$h^2 + k^2 = a^2 + b^2$$

aangezien u en u^1 elkanders complement zijn.

Zijn dus voor een projectie-methode de vervormingen bekend, welke oneindig kleine stukken van den meridiaan en van de parallel ondergaan, alsmede tot welk bedrag de rechte hoek tusschen die lijnen gewijzigd wordt, dan kunnen de halve groote en kleine as der vervormingsellips berekend worden.

Is $\theta = 0°$, d. w. z. snijden de meridianen en parallellen op de kaart elkander onder rechte hoeken, dan kan aan de vergelijkingen $ab = hk$ en $a^2 + b^2 = h^2 + k^2$ alleen voldaan worden door de waarden $a = h$ of k en $b = k$ of h. In dergelijke gevallen liggen dus de assen der ellips van vervorming langs de meridianen en parallellen der kaart.

Oppervlak-vervorming. Daar de lijnen door de afbeelding verandering in lengte ondergaan, zijn ook in het algemeen de oppervlakken aan verandering onderhevig. Het oppervlak der ellips van vervorming is gelijk aan dat van den cirkel op den bol als $\pi r^2 = ab \pi$ of $r = \sqrt{ab}$ is en en daar $r = 1$ is gesteld, is de voorwaarde voor oppervlakgelijkheid $ab = 1$.

Bestaat deze, dan kan uit de formule voor de hoekvervorming worden afgeleid, dat de grootste hoekvervorming alsdan bepaald kan worden uit de formule: $tg \frac{\omega}{2} = \frac{a-1}{a+1}$.

Aan de hand der formules kunnen de navolgende conclusies getrokken worden.

Voor lengtegelijkheid eener projectie wordt vereischt, dat de beide assen der ellips voor alle punten gelijk aan de eenheid zijn. Deze voorwaarde kan op een plat vlak, tengevolge der onontwikkelbaarheid van den bol, niet vervuld worden. Wèl kan een der beide assen voor opvolgende punten gelijk aan de eenheid blijven, hetzij in bepaalde richtingen, hetzij in alle richtingen van uit een bepaald punt. In die gevallen zal echter de andere as grooter of kleiner dan de eenheid zijn. Hieruit volgt dat equidistantie slechts een beperkte beteekenis kan hebben en dat op een kaart de schaal van afbeelding voor de verschillende punten niet absoluut gelijk kan zijn.

Opdat een projectie conform zij, moet de hoekvervorming in elk punt gelijk nul zijn, waarvoor vereischt wordt dat overal $a = b$ is. Aangezien de schaal voor alle punten in een kaart niet gelijk kan zijn, is deze voorwaarde niet te verwezenlijken voor een steeds gelijk blijvende grootte van beide assen. Bij conforme projecties zal de hoek waaronder twee afgebeelde grootcirkels elkander in een punt snijden gelijk zijn aan dien, waaronder zij dit in het overeenkomstige punt van den bol doen. Daar in het algemeen afbeeldingen van grootcirkels op een plat vlak kromme lijnen zijn en de constructie van deze voor elk geval te omslachtig is, worden hoeken in de kaart verkregen door rechte lijnen tusschen de betrokken punten te trekken. Slechts zoolang als aangenomen mag worden, dat die rechten samenvallen met de afbeeldingen der grootcirkels door die punten gedacht, zal de conformiteit in de praktijk van het kaartgebruik bestaan, zoodat in dien zin ook hoekgelijkheid van een kaart een beperkte beteekenis heeft.

Uit het opgemerkte ten opzichte van de lengtegelijkheid volgt, dat conformiteit en equidistantie slechts plaatselijk samen kunnen gaan.

Oppervlakgelijkheid kan een projectie over hare geheele uitgebreidheid bezitten. Daarvoor moet $ab = 1$ zijn, waaraan voldaan kan worden zonder

dat de *a's* en de *b's* over de geheele afbeelding gelijk zijn. Slechts hun product moet constant blijven.

Zijn voor de geheele projectie noch de *a's* gelijk aan de *b's*, noch $ab = 1$, dan bezit de afbeelding geen hoekgelijkheid en geen oppervlakgelijkheid. Boven bleek reeds dat hoekgelijkheid en lengtegelijkheid, zelfs in de beperkte beteekenis welke noodig bleek, slechts plaatselijk samen kunnen gaan. Ook kan hoekgelijkheid niet gelijktijdig met oppervlakgelijkheid verwezenlijkt worden. Daarvoor zou over de geheele afbeelding $a = b = 1$ moeten zijn, hetgeen gelijkvormigheid met het afgebeelde gedeelte van den aardbol zou insluiten. Dit is onmogelijk, aangezien een bol niet ontwikkelbaar is op een plat vlak. Evenmin is lengtegelijkheid in het algemeen te vereenigen met oppervlakgelijkheid. Voor de gedeeltelijke verwezenlijking der eerste eigenschap, die mogelijk is, moet a of b gelijk één zijn, hetgeen den eisch van $ab = 1$ uitsluit.

Evenals het samengaan van hoekgelijkheid met lengtegelijkheid, kan deze laatste eigenschap met oppervlakgelijkheid slechts plaatselijk samengaan voor die gedeelten eener kaart, waar praktisch het projectievlak met den bol samenvalt, zooals in en nabij het centrale punt op het platte aanrakingsvlak of op en nabij de lijn van samenvalling van den aanrakingskegel met den bol.

Geen afbeelding van een uitgestrekt gedeelte der aarde op een plat vlak, kan dus tegelijkertijd aan meer dan één der drie eigenschappen voldoen en dan nog slechts in beperkte mate voorzoover equidistantie aangaat en voorzoover conformiteit in de praktijk betreft.

INDEELING.

Reeds is gezegd, dat onder kaartprojectie verstaan wordt: het ontwerpen van een net van meridianen en parallellen van een gedeelte van het oppervlak der aarde op een plat vlak. Teneinde een voor de geheele kaart geldend verband te verkrijgen tusschen werkelijkheid en afbeelding, is het noodig dat het ontwerpen geschiedt volgens voor de gekozen projectie vaststaande beginselen, waarvan niet wordt afgeweken. Aangezien tallooze stelsels van beginselen mogelijk zijn, kunnen ook tal van projectie-methoden bestaan. Voor een overzicht is het wenschelijk deze projecties in groepen in te deelen. Binnen deze groepen worden de afzonderlijke methoden door namen onderscheiden.

Een indeeling volgens de in de vorige afdeeling behandelde hoofdeigenschappen bestaat en is in vele opzichten belangrijk, doch voor het beperkte beoogde doel minder geschikt. Ook kan een onderscheid gemaakt worden volgens den aard der bovenbedoelde beginselen. Worden deze weergegeven door een eenvoudig meetkundig verband, dan spreekt men van meetkundige projecties; is een dergelijk eenvoudig verband gewijzigd, teneinde bepaalde doeleinden te bereiken, dan noemt men de betrokken projectie een gewijzigde meetkundige of conventioneele projectie (conventioneel: op een overeenkomst berustende).

Als voorbeelden van meetkundige projecties kunnen de perspectivische genoemd worden. Men neemt daarbij aan dat uit een bepaald punt, het

oogpunt geheeten, lijnen worden getrokken naar alle punten van het af te beelden net, welke lijnen of hun verlengden een plat vlak snijden, dat loodrecht gesteld is op de lijn van het oogpunt naar het middenpunt van het af te beelden gedeelte der aarde. Vereeniging der snijpunten geeft het net der kaart. Verschil in vorm van het af te beelden gedeelte kan alleen ontstaan door verschil in ligging van het oogpunt. Perspectivische projecties zijn de gnomonische, de stereographische en de orthographische projectie.

Als voorbeeld van de conventioneele projecties kan die van Bonne genoemd worden, waarbij voor de afbeelding der parallellen een eenvoudig meetkundig verband bestaat, hetgeen echter voor de meridianen niet is doorgevoerd teneinde een bepaald doel, te weten oppervlakgelijkheid te bereiken.

De meest gebruikelijke indeeling en tevens de voor het gestelde doel geschikte, is die welke uitgaat van de gebruikte projectievlakken. Vervolgens wordt voor elk der vlakken onderscheid gemaakt tusschen meetkundige en conventioneele projecties en elk van deze groepen weder onderverdeeld naar de hoofdeigenschappen.

Het ligt voor de hand voor een projectie het platte vlak te kiezen, dat evenwijdig loopt aan het grondvlak van het betrokken bolsegment en raakt aan het middenpunt van het af te beelden gedeelte der aarde. Uit den aard der zaak zal daardoor de omgeving van dit middenpunt met groote juistheid worden afgebeeld. Dit heeft er toe geleid, dat men trachtte de aanraking tusschen bol en raakvlak uit te breiden, hetgeen mogelijk is door voor het laatste een vlak van enkele kromming te kiezen. Een dergelijk vlak kan in tegenstelling met een van dubbele kromming zonder vervorming tot een plat vlak ontwikkeld worden. Zoodanige vlakken zijn omhullende kegel- of cylindervlakken. In plaats van een plat raakvlak kan men ook een daaraan evenwijdig vlak kiezen, dat dus den bol snijdt en eveneens in plaats van omhullende, snijdende kegel- of cylindervlakken.

Raakt het platte vlak de pool — of algemeener — staat het loodrecht op de aardas, of valt de as van kegel- of cylindervlak samen met die der aarde, dan heeten de projecties normaal. Worden deze voorwaarden niet vervuld, dan noemt men ze transversaal of scheef. Bij de transversale projecties raakt of snijdt het platte vlak den equator of ligt de as van het omhullende of snijdende gebogen vlak in dat van den equator; bij de scheeve projecties hebben de projectievlakken een willekeurigen stand. Van de scheeve of transversale projecties zullen alleen die op het platte raakvlak behandeld worden, aangezien die op het kegel- of cylindervlak voor de hydrographie van geen belang zijn.

Volgens de afbeeldingsvlakken, zij het dat die van enkele kromming slechts worden gebruikt om na te gaan hoe de constructie op een plat vlak, dat als het ontwikkelde gebogen vlak gedacht wordt, moet uitgevoerd worden, kunnen de projecties verdeeld worden in:

projecties op het platte vlak;
kegel- of conische projecties, en
cylindrische projecties.

Tusschen deze drie groepen bestaat een nauw verband, daar de kegelprojectie als het algemeene geval beschouwd kan worden, waarvan de beide andere grensgevallen zijn. Stelt men zich een omhullende kegel voor, die de aarde raakt langs een parallel en waarvan de as samenvalt met die der aarde, dan zal de tophoek van dezen kegel stomper zijn naarmate de raakparallel op hooger breedte ligt. Is de breedte 90° dan is de tophoek 180°, het kegelvlak wordt plat en de top valt samen met de pool; is de breedte 0° dan wordt ook de tophoek nul, de top ligt dus op oneindigen afstand en het kegelvlak wordt een omhullende cylinder.

De tophoek van den kegel bepaalt dus zijn vorm. Wordt de kegelmantel langs de beschrijvende lijn opengesneden, dan kan de mantel worden ontwikkeld tot een plat vlak, dat de gedaante heeft van een sector, waarvan de hoek afhangt van den tophoek van den kegel. Het ligt voor de hand op een dergelijken mantel de meridianen af te beelden door de snijlijnen van de voortgezette meridiaanvlakken met het kegelvlak, welke lijnen in den top convergeeren. In den sector zullen de meridianen dus een stralenbundel vormen. Uit deze afbeeldingswijze der meridianen volgt dat de parallellen door concentrische cirkelbogen moeten worden voorgesteld, wier gemeenschappelijk middelpunt in het snijpunt der kaartmeridianen ligt. In den sector snijden de meridianen elkander niet onder den zelfden hoek als op de aarde, doch tusschen deze hoeken bestaat een bepaalde verhouding, uitgedrukt door $\lambda' = n\lambda$. In deze formule is λ de hoek tusschen twee meridianen op aarde, λ' tusschen de overeenkomstige meridianen der kaart en n een echte breuk, welke voor een bepaalde projectie een vaste waarde heeft.

Wordt de aanrakingsparallel gevormd door den equator en gaat de kegel dus over in een cylinder, dan zijn de kaartmeridianen rechte evenwijdige lijnen, die elkander onder een hoek van 0° snijden, zoodat n in dit geval ook nul is. De kaartparallellen zijn dan eveneens rechte evenwijdige lijnen.

Is de breedte der aanrakingsparallel 90°, dat wil zeggen is de kegel een plat vlak geworden dat de pool raakt, dan snijden de kaartmeridianen elkander onder hoeken, die even groot zijn als de overeenkomstige hoeken op aarde en n is gelijk één. Alle punten der kaart liggen dus ten opzichte van de pool in de juiste richting. Uithoofde van deze eigenschap noemt men de projectie op een plat vlak ook wel een azimuthale projectie.

De waarde van n heeft dus 0 en 1 tot grenzen.

Bij deze voorstelling der meridianen door rechte lijnen wordt vooropgesteld dat de projecties meetkundig zijn. Alsdan kunnen de drie behandelde soorten als volgt worden omschreven.

Normale azimuthale projecties zijn afbeeldingen van het aardoppervlak op het platte vlak, waarbij de meridianen zich voordoen als een stralenbundel van elkander onder gelijke hoeken als op aarde snijdende lijnen ($n = 1$) en de parallellen voorgesteld worden door concentrische cirkels, wier middelpunt in het snijpunt der meridianen ligt.

Normale kegelprojecties zijn afbeeldingen van het aardoppervlak op het platte vlak, waarbij de meridianen zich als een stralenbundel voordoen,

zoodanig dat twee meridianen, welke in de aardpool een hoek λ vormen op de kaart een hoek $\lambda' = n\lambda$ insluiten, waarbij n een constante echte breuk is en de parallellen voorgesteld worden door concentrische cirkelbogen met het snijpunt der meridianen als middelpunt.

Normale cylindrische projecties zijn afbeeldingen van het aardoppervlak op het platte vlak, waarbij de meridianen zich voordoen als evenwijdige lijnen ($n = 0$) en eveneens de parallellen, welke de meridianen onder rechte hoeken snijden.

Als buiten de gekozen indeeling staande, moeten nog genoemd worden de polyeder- of facettenprojectie en de polykonische projecties.

Bij de eerste methode wordt onder het aardoppervlak een regelmatig veelvlak gedacht met een zeer groot aantal facetten, welk veelvlak met zijn hoekpunten in dit oppervlak ligt. Op elk dezer facetten wordt vervolgens het overeenkomstig gedeelte van het aardoppervlak weergegeven. In een plat vlak kunnen de afzonderlijke afbeeldingen niet tot een sluitend geheel aan elkander gevoegd worden. Wanneer de facetten echter klein zijn, het aantal bladen en de schaal niet te groot, blijven de gapingen van een voor de praktijk te verwaarloozen bedrag. Voor hydrografische doeleinden vindt deze methode geen toepassing; een verwante vorm wordt echter door den Topographischen Dienst in Indië gebruikt en aangezien de aanrakingen tusschen dezen en den hydrographischen dienst steeds veelvuldiger zullen worden, kan de methode niet onvermeld blijven (zie verder blz. 68).

Bij de polykonische projecties wordt niet een omhullende kegelmantel als projectie-vlak gebruikt, doch een opeenvolging van omhullende mantels, welke elk voor zich den bol raken volgens een parallel. De kaartparallellen worden daarbij afgebeeld door cirkels, welke niet concentrisch zijn. Daardoor en door de wijze van afbeelding der meridianen kan ook deze projectiemethode niet ondergebracht worden bij de aangenomen indeeling. Van deze methode zal slechts een enkel geval behandeld worden, dat in Amerika vrij veel toepassing vindt (blz. 33).

Achtereenvolgens zullen de meetkundige projecties op de verschillende vlakken behandeld worden, voor zoover dit voor het gestelde doel noodig voorkomt. Daarbij aansluitend zullen ook voor zoover gewenscht de conventioneele projecties behandeld worden, benevens de beide bovengenoemde, buiten de indeeling staande soorten.

HOOFDSTUK I.

PROJECTIES OP HET PLATTE VLAK.

Bij deze projecties onderscheiden wij de normale projectie, waarbij het vlak de pool raakt; de transversale waarbij het raakpunt in den equator ligt en de scheeve, waarbij het vlak een willekeurig punt op aarde raakt. In de beide laatste gevallen wordt het raakpunt „hoofdpunt" genoemd.

Eerder werd reeds opgemerkt dat in plaats van een raakvlak soms een daaraan evenwijdig snijvlak gebruikt wordt. Ook werd in de vorige afdeeling verklaard, dat in een normale projectie op het platte vlak de meridianen worden afgebeeld als een stralenbundel van elkaar onder dezelfde hoeken als op aarde snijdende lijnen en de parallellen als concentrische cirkels, wier middelpunt het snijpunt der meridianen is. Evenzoo zullen bij een transversale of scheeve projectie groote cirkels door het hoofdpunt op aarde gedacht als een dergelijke stralenbundel worden afgebeeld en de kleine cirkels, om het hoofdpunt als pool beschreven, als concentrische cirkels wier middelpunt het hoofdpunt op de kaart is. Deze groote cirkels worden „hoofdcirkels", de kleine „horizontaalcirkels" genoemd.

Reeds werd in de vorige afdeeling medegedeeld waarom aan projecties op het platte vlak ook wel de naam van azimuthale projecties gegeven wordt. Aan het begrip van azimuthaliteit is dat van zenithaliteit nauw verbonden. Onder zenithaliteit wordt verstaan, dat alle punten, die in het af te beelden gedeelte der aarde evenver van de pool of het hoofdpunt verwijderd zijn, dit ook zijn op de kaart.

Die punten liggen toch in beide gevallen op één parallel- of horizontaalcirkel. Alle punten in een om het kaartmiddelpunt beschreven cirkel vertoonen dus een zelfde afwijking, waaruit volgt dat azimuthale projecties zich onderling slechts onderscheiden door den straal, waarmede de parallel (horizontaal)cirkels beschreven worden.

De straal van een horizontaalcirkel in een projectie is afhankelijk van den spherischen afstand van dien cirkel tot het hoofdpunt, welke afstand met δ wordt aangeduid. Bij een normale projectie is $\delta = 90^\circ - \varphi$, waarin φ de geographische breedte voorstelt. De afmeting van den straal is dus een functie van δ, hetgeen wordt uitgedrukt door $f(\delta)$ de straalformule te noemen.

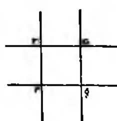
De constructie is voor alle normale projecties dezelfde en evenals de berekening zeer eenvoudig. Naarmate van het aantal op te nemen meridianen wordt de omtrek van een willekeurig grooten cirkel in een gelijk aantal deelen verdeeld en de deelpunten met het middelpunt verbonden. Voor de te teekenen parallelcirkels wordt $\delta = 90^\circ - \varphi$ genomen, $f(\delta)$ berekend en de uitkomst volgens de schaal verkleind. Om het kaartmiddelpunt

worden met de gevonden stralen cirkels getrokken. Het net is dus gegeven in de poolcoördinaten λ en δ.

Bij niet normale projecties zou op overeenkomstige wijze het net van hoofd- en horizontaalcirkels geconstrueerd kunnen worden. Vervolgens zouden de geographische coordinaten, breedte en lengte der snijpunten van de te trekken meridianen en parallellen door berekening kunnen worden omgezet in poolcoördinaten ten opzichte van het hoofdpunt. Deze poolcoördinaten afzettende in het projectievlak, wordt de ligging der betrokken snijpunten bekend en door verbinding dier snijpunten het geographische net verkregen. Gewoonlijk wordt deze weg echter niet gevolgd, doch het vraagstuk op andere wijze opgelost, zooals later — voor zoover noodig — zal aangegeven worden.

Wat de vormverandering der projecties op het platte vlak betreft, is reeds opgemerkt dat de horizontaal- of parallelcirkels lijnen van gelijke verandering zijn. Men noemt lijnen van gelijke verandering equideformaten. Verder bleek uit het bovenstaande dat de kaartmeridianen en -parallellen bij de normale projecties elkander loodrecht snijden.

Volgens het behandelde in het hoofdstuk „Vervorming" liggen dus de assen der ellips van vervorming langs de meridianen en parallellen; bij niet normale projecties langs de hoofd- en horizontaalcirkels. Worden de stralen der kaartparallellen (hor. cirkels) m genoemd, dan kunnen h (lengteverhouding in de richting der meridianen blz. 9) en k (die verhouding in de richting der parallellen) op de volgende wijze worden uitgedrukt in functie van m en δ.



Zij nevenstaande oneindig kleine ruit van den bol gevormd door twee parallellen met een oneindig klein verschil in poolsafstand en twee meridianen met een oneindig klein lengteverschil. Voor een bolstraal $= 1$ is $Ff = d\delta$; de afbeelding van Ff op de kaart is het oneindig kleine verschil in stralen der beide betrokken kaartparallellen en dus dm, waaruit $h = \frac{dm}{d\delta}$. FG en de afbeelding daarvan op de kaart staan tot elkander als de straal van de kaartparallel tot dien van de bolparallel, dus $k = \frac{m}{\sin \delta}$.

Na deze algemeene beschouwing zullen achtereenvolgens de voornaamste projecties op het platte vlak afzonderlijk behandeld worden, waarbij zooals reeds vroeger is vooropgezet de afbeelding op gelijke schaal ontworpen wordt verondersteld.

De equidistante azimuthale projectie. Onder equidistantie wordt bij deze projectie slechts verstaan: gelijkheid van alle afstanden tot het kaartmiddenpunt aan de overeenkomstige afstanden op aarde. Teneinde een net te trekken, dat aan deze voorwaarde voldoet, moeten alle horizontaalcirkels evenver van het hoofdpunt der kaart verwijderd zijn als de overeenkomstige cirkels op aarde van het hoofdpunt.

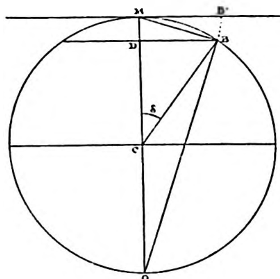
Zij AMQ een halve groote cirkel, CM de door het hoofdpunt M getrokken straal en AQ de middellijn, welke loodrecht op dien straal staat. Zij B een punt van een der af te beelden horizontaalcirkels, met een topsafstand $\delta =$ boog MB, en ZE de doorsnede van het vlak van projectie, rakende in M, met het vlak van den grooten cirkel. Wordt op dit projectievlak met den straal $MB' =$ boog MB een cirkel beschreven, dan is die cirkel de horizontaalcirkel van de kaart, waarin alle punten gelegen zijn met een topafstand δ en die dus alle even ver van het hoofdpunt liggen, zoowel op de kaart als op de aarde. De straalformule $f(\delta)$ is dus bij deze projectie = boog δ. De straal van den overeenkomstigen horizontaalcirkel op aarde is echter $BD = \sin \delta$, zoodat de lengten van twee bogen met gelijke hoekopening in beide cirkels niet gelijk zijn, doch zich verhouden als boog δ tot $\sin \delta$, welke verhouding grooter is dan 1. Deze verhouding geeft de afstandvervorming weer in een richting tangentieel aan de horizontaalcirkels der kaart, zij geeft dus de betrekking van de groote as der ellips van vervorming tot de eenheid. In radialen zin worden de lengten niet vervormd; de kleine as dezer ellips is dus gelijk 1.

De beide assen bekend zijnde, kunnen met behulp der formules $\sin \omega = \frac{a - b}{a + b}$ en $S = ab$, de grootste hoekvervorming $2\,\omega$ en de oppervlakvervorming berekend worden. In onderstaande tabel zijn de uitkomsten dezer berekening gegeven.

δ	$2\,\omega$	a	b	$S=ab$	δ	$2\,\omega$	a	b	$S=ab$
0°	0° 0′	1.000	1.000	1.000	40°	4° 44′	1.086	1.000	1.086
5	0 4	1.001	1.000	1.001	50	7 27	1.139	1.000	1.139
10	0 17	1.005	1.000	1.005	60	10 52	1.209	1.000	1.209
15	0 38	1.012	1.000	1.012	70	15 0	1.300	1.000	1.300
20	1 10	1.021	1.000	1.021	80	19 54	1.418	1.000	1.418
30	2 38	1.047	1.000	1.047	90	25 39	1.571	1.000	1.571

De projectie is dus azimuthaal, zenithaal en in beperkte beteekenis equidistant, maar niet conform en niet equivalent. In haar normalen vorm is zij reeds door Mercator gebruikt voor de streken op hoogere breedten, welke minder geeigend waren voor de projectie met wassende breedte. De transversale en scheeve vorm werden eerst in 1772 door LAMBERT aangegeven, doch worden zelden toegepast.

De equivalente azimuthale projectie. Om de voorwaarde van equivalentie te vervullen, moet het oppervlak van een horizontaalcirkel op de kaart gelijk zijn aan dat van het weer te geven bolsegment. Stel de straal van dien cirkel $MB' = m$, dan moet dus $\pi m^2 = 2 \pi rh$ zijn, in welke formule $h = MD$ is. m is dus middenevenredig tusschen h en den diameter en volgens de bekende eigenschap van den rechthoekigen driehoek is $m = MB = 2 \sin \frac{1}{2} \delta$. De straalformule is dus voor deze projectie $f(\delta) = 2 \sin \frac{1}{2} \delta$.



Hoofd- en horizontaalcirkels snijden elkander weder onder rechte hoeken en de assen der ellips van vervorming liggen dus weder in de richtingen dier cirkels. Daar alle punten met gelijken zenithsafstand op denzelfden horizontaalcirkel liggen, zijn die cirkels ook bij deze projectie equideformaten. Aangezien bij verwijdering van het hoofdpunt, de lengten der bogen meer toenemen dan die der koorden, heeft op de kaart een toenemende verkorting in radiale richting plaats; daarentegen een verlenging in tangentiale richting, omdat de straal van een horizontaalcirkel op de kaart (MB) grooter is dan die van den overeenkomstigen horizontaalcirkel op den bol (DB). De kleine as ligt dus in radiale richting, de groote as is raaklijn aan den horizontaalcirkel door het betrokken punt.

$$MB : DB = 2 \sin \tfrac{1}{2} \delta : \sin \delta \text{ of } \frac{MB}{BD} = a = \sec \tfrac{1}{2} \delta$$

Uit de voorwaarde voor de equivalentie, $ab = 1$, volgt $b = \cos \frac{1}{2} \delta$ en

$$\text{uit } tg \frac{\omega}{2} = \frac{a-1}{a+1} \qquad tg \frac{\omega}{2} = tg^2 \frac{\delta}{4}$$

Deze formules geven de navolgende uitkomsten.

δ	2ω	a	b	$S = ab$	δ	2ω	a	b	$S = ab$
0°	0° 0′	1.000	1.000	1.000	40°	7° 7′	1.064	0.940	1.000
5	0 7	1.001	0.999	1.000	50	11 15	1.103	0.906	1.000
10	0 26	1.004	0.996	1.000	60	16 26	1.155	0.866	1.000
15	0 59	1.009	0.991	1.000	70	22 43	1.221	0.819	1.000
20	1 45	1.015	0.985	1.000	80	30 11	1.305	0.766	1.000
30	3 58	1.035	0.966	1.000	90	38 57	1.414	0.707	1.000

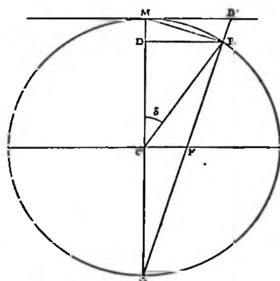
De projectie is in 1772 uitgedacht door LAMBERT. Hoewel zij door haar eigenschap van oppervlakgelijkheid zeer geeigend is voor atlassen, wordt zij daar eerst in den laatsten tijd veelvuldig bij toegepast. Een vergelijk met de equidistante azimuthale projectie toont aan, dat de laatste wel is

waar kleinere hoekvervorming bereikt, doch daarbij de waarden van *a* grooter zijn dan bij de equivalente projectie.

De conforme azimuthale projectie.

Bij een conforme projectie moet volgens het vroeger gevondene $h = k$ zijn en dus (zie blz. 16):

$$\frac{dm}{d\delta} = \frac{m}{\sin \delta} \text{ of } \frac{dm}{m} = \frac{d\delta}{\sin \delta}.$$



Integreerende:

$lm = l\ tg\ \frac{1}{2}\ \delta + lc$ of $m = c\ tg\ \frac{1}{2}\ \delta$.

Uit deze waarde voor den straal blijkt, dat de constante slechts van beteekenis is voor de schaal en niet voor de wijze van afbeelding. Om tot een bepaalde waarde voor haar te komen, merken wij op dat in nevenstaande figuur $MB' = 2\ tg\ \frac{1}{2}\ \delta$ is, zoodat voor het raakvlak in M de straalformule wordt:

$f(\delta) = 2\ tg\ \frac{1}{2}\ \delta$.

De straal van den cirkel van vervorming volgt uit de verhouding van m tot DB en is dus $\frac{2\ tg\ \frac{1}{2}\ \delta}{\sin \delta} = sec^2\ \frac{1}{2}\ \delta$.

$S = hk = sec^4\ \frac{1}{2}\ \delta$.

Daar de secans van een hoek altijd grooter is dan 1, neemt de vergrooting der oppervlakte toe met het grooter worden der zenithsafstanden. De vervormingen blijken uit het onderstaande staatje.

δ	$2\ \omega$	$a = b$	S	δ	$2\ \omega$	$a = b$	S
0°	0° 0′	1.000	1.000	40°	0° 0′	1.132	1.282
5		1.002	1.004	50		1.217	1.482
10		1.008	1.015	60		1.333	1.778
15		1.017	1.035	70		1.490	2.221
20		1.031	1.063	80		1.704	2.904
30		1.072	1.149	90		2.000	4.000

Hieruit blijkt dat de snelle toeneming der vergrooting deze projectie minder geschikt maakt voor groote zenithafstanden.

In de figuur wordt gezien, dat de afbeelding van elk punt van den bol op het projectievlak gevonden wordt, door uit het punt van den bol, diametraal tegenover het hoofdpunt gelegen, een lijn naar het af te beelden punt te trekken en die lijn te verlengen tot zij het projectie-vlak snijdt. De projectie is dus een perspectivische met O als oogpunt. In plaats van het raakvlak wordt ook wel het daarmede evenwijdige vlak door het bolmiddelpunt gebruikt; het punt B wordt dan afgebeeld in F. Bij de normale projectie is dit laatste vlak de equator. De straalformule is in dit geval $f(\delta) = tg\ \frac{1}{2}\ \delta$.

De conforme azimuthale projectie is beter bekend onder den naam van stereographische projectie. Zij wordt aan Hipparchus toegeschreven en werd in de oudheid voor sterrekaarten gebezigd. De Nederlander Gemma Frisius paste haar het eerst (1594) toe bij landkaarten en sindsdien is deze projectie veelvuldig, in het bijzonder voor halfronden gebezigd. Later in onbruik geraakt, omdat aan hoekgelijkheid minder waarde wordt gehecht dan aan oppervlakgelijkheid en de vervorming der oppervlakten juist zeer sterk is, vindt de methode in den laatsten tijd weder meer toepassing. Dit dankt zij aan hare geschiktheid voor de overbrenging van een driehoeksnet op een plat vlak, terwijl voor kleinere zenithsafstanden de oppervlakmisvorming niet groot is. Deze kan nog verminderd worden, door in plaats van een raak- een snijvlak als projectievlak aan te nemen. In den scheeven vorm is de methode aangenomen voor de Nederlandsche Rijksdriehoeksmeting (zie blz. 55).

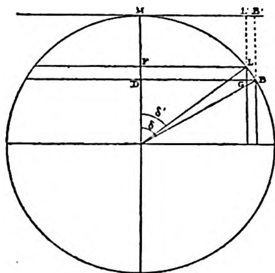
In het bovenstaande zijn drie azimuthale projecties zoodanig behandeld, dat achtereenvolgens een bepaalde hoofdeigenschap als voorwaarde aan de kaart werd gesteld, waarna de straalformule werd afgeleid. Eigenschappen van andere azimuthale projecties kunnen niet zoo bepaald omschreven worden. Om dergelijke projecties te leeren kennen, zal een andere weg worden ingeslagen, door namelijk een straalformule aan te nemen en vervolgens te onderzoeken welke eigenschappen de daarmede ontworpen kaart heeft.

De behandelde straalformules luiden:

$$f(\delta) = boog\ \delta \quad \text{(equidistante projectie);}$$
$$= 2\ sin\ \tfrac{1}{2}\ \delta \quad \text{(equivalente „);}$$
$$= 2\ tg.\ \tfrac{1}{2}\ \delta \quad \text{(conforme „).}$$

Het ligt voor de hand andere functies voor δ in te voeren, b.v. *sin* δ en *tg* δ.

Straalformule $f(\delta) = sin\ \delta$ (Orthographische projectie). Bij deze projectie is dus de straal van den horizontaalcirkel op de kaart gelijk aan die op den bol. De kaart zal derhalve in de richting van de horizontaalcirkels equidistant zijn, zoodat een der halve assen van de ellips van vervorming gelijk 1 is. Uit de figuur blijkt dat de kaart in de richting der hoofdcirkels een verkorting ondergaat, immers de boog wordt voorgesteld door zijn loodrechte projectie op het projectievlak; de halve kleine as valt dus samen met den hoofdcirkel. Het is duidelijk dat gelijke uitkomsten worden verkregen op alle vlakken evenwijdig aan het raakvlak.



Zij L een tweede punt op denzelfden hoofdcirkel gelegen als B en zoo dicht daarbij, dat LB als recht kan worden beschouwd. LB wordt in de kaart $L'B'$ en wordt in reden van *cos* δ verkort, dus de halve kleine as der ellips van vervorming is gelijk *cos* δ en $S = ab =$ *cos* δ waaruit

volgt dat een oppervlak bij toenemenden zenithsafstand op de kaart steeds kleiner wordt voorgesteld en bij $\delta = 90^\circ$ door een lijn wordt weergegeven.

$2\,\omega$ wordt gevonden uit $sin\,\omega = \dfrac{a - b}{a + b} = \dfrac{1 - cos\,\delta}{1 + cos\,\delta} = tg^2 \tfrac{1}{2}\,\delta$.

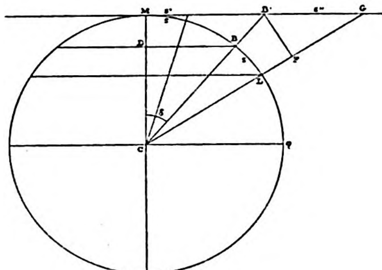
De vervormingen blijken uit onderstaanden staat.

δ	$2\,\omega$	a	b	$S = ab$	δ	$2\,\omega$	a	b	$S = ab$
0°	0° 0′	1.000	1.000	1.000	60°	38° 57′	1.000	0.500	0.500
15	1 59	1.000	0.966	0.966	75	72 9	1.000	0.259	0.259
30	8 14	1.000	0.866	0.866	90	180 0	1.000	0.000	0.000
45	19 45	1.000	0.707	0.707					

Toont deze staat duidelijk aan, dat de behandelde projectie voor landkaarten in engeren zin van weinig beteekenis is, toch is zij van belang. Uit de figuur blijkt dat elk punt wordt afgebeeld door het voetpunt der loodlijn uit het punt op het projectievlak neergelaten. De methode kan dus beschouwd worden als een perspectivische, waarbij het oogpunt op oneindigen afstand ligt, zoodat de gezichtstralen evenwijdige lijnen worden. Deze parallelle of orthographische projectie leent zich in het bijzonder voor de afbeelding van een voorwerp op grooten afstand gezien en is dus b. v. zeer geschikt voor het ontwerpen van maankaarten.

De orthographische projectie is reeds zeer oud en wordt zoowel toegeschreven aan Apollonius als aan Hipparchus, die in de derde en tweede eeuw v. C. leefden.

Straalformule $f(\delta) = tg\,\delta$ (Gnomonische projectie). Uit de figuur blijkt dat, om den horizontaalcirkel door B in projectie zoodanig voor te stellen dat de straal $tg\,\delta$ is, de lijn CB slechts verlengd behoeft te worden tot zij het raakvlak in B' snijdt. De projectie is dus perspectivisch met het oogpunt in C, vandaar dat men spreekt van centrale of gnomonische projectie.



Reeds op geringen afstand van het hoofdpunt wordt bij deze projectie de voorstelling beduidend vergroot. De omtrek van een horizontaalcirkel op de kaart staat tot den omtrek van den overeenstemmenden cirkel op den bol als $tg\,\delta$ tot $sin\,\delta$ dus als $sec\,\delta$ tot 1. In de richting van den horizontaalcirkel bestaat dus een vergrooting $sec\,\delta$. Om de lengteverandering in de richting van den hoofdcirkel te bepalen, zij van uit M op den hoofdcirkel MQ een boog s afgezet, die zoo klein is, dat zij als recht mag worden beschouwd.

Wordt deze boog in projectie bijna onveranderd afgebeeld; een boog s van uit B afgezet, wordt beduidend vergroot. Zij $B'F$ loodrecht op CB', dan is $B'F : BL = CB' : CB$ en daar $r = 1$ en $CB' = sec\, \delta$ is:

$$B'F = s \times sec\, \delta \qquad B'G = s'' = B'F\, sec\, \delta = s\, sec^2\, \delta.$$

Daar $sec^2\, \delta > sec\, \delta$ is, ligt de halve groote *as* in de richting van den hoofdcirkel; de halve kleine $as = sec\, \delta$ in de richting van den horizontaalcirkel. De vergrooting in oppervlak is $S = ab = sec^3\, \delta$, terwijl de grootste hoekverandering wordt gevonden uit $sin\, \omega = \frac{sec^2\, \delta - sec\, \delta}{sec^2\, \delta + sec\, \delta} = \frac{1 - cos\, \delta}{1 + cos\, \delta} = tg^2 \tfrac{1}{2}\, \delta.$

Onderstaand staatje geeft de vervormingen:

δ	$2\,\omega$	a	b	$S = ab$	δ	$2\,\omega$	a	b	$S = ab$
0°	0° 0'	1.000	1.000	1.000	60°	38°57'	4.000	2.000	8.000
15	1 59	1.072	1.035	1.110	75	72 9	14.930	3.864	57.680
30	8 14	1.333	1.155	1.540	90	180 0	∞	∞	∞
45	19 45	2.000	1.414	2.828					

Vanwege de groote vervormingen vindt de projectie voor landkaarten geen toepassing. Daar deze projectie de eigenschap heeft alle groote cirkels als rechte lijnen weer te geven, hetgeen een gevolg is van de omstandigheid dat het oogpunt in het vlak van elken zoodanigen cirkel ligt, is zij echter van belang voor de zeevaart, aangezien de grootcirkeltrek op een volgens de gnomonische projectie ontworpen kaart als een rechte lijn kan getrokken worden. Ook voor het afzetten van peilingen, verkregen door middel van draadlooze telegrafie, vinden dergelijke kaarten toepassing (zie blz. 43).

De bestaande conventioneele projecties, waarbij uitgegaan wordt van het platte vlak, hebben voor het gestelde doel geen belang.

HOOFDSTUK II.

KEGELPROJECTIES.

Zooals vroeger gezegd is, zullen van deze projecties uitsluitend de normale behandeld worden.

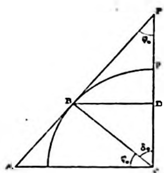
Reeds bij de indeeling der projecties werd verklaard, dat het streven om grootere overeenstemming te verkrijgen tusschen het af te beelden gedeelte der aarde en de kaart, er toe geleid heeft de projectie uitgevoerd te denken op een vlak van enkele kromming, dat de aarde in meer dan één punt raakt en dat vervolgens tot een plat vlak ontwikkeld

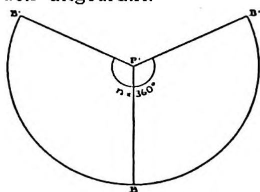
wordt. De ontwikkelbare vlakken zijn het kegel- en het cylindervlak. In vele gevallen wordt het ontwikkelbaar vlak zoodanig gekozen, dat het een parallelcirkel raakt, doch ook komt het voor dat het gedacht wordt de aarde volgens twee parallellen te snijden. Aangezien de vervormingen der kaart bij projecties op ontwikkelbare vlakken naar beide zijden van de aanrakingsparallel of van de snijparallellen toenemen, is de keuze dezer parallellen beperkt en komt in het eerste geval alleen de middenparallel der kaart, of een daar dichtbij gelegen, in aanmerking.

Met de keuze van het ontwikkelbare vlak, waarop de projectie uitgevoerd gedacht wordt, is echter de methode van projectie nog niet bepaald. Evenals bij het platte vlak, kunnen tal van bindende beginselen gekozen worden, met elk waarvan een projectie-methode overeen komt. Daar echter na ontwikkeling van het gebogen vlak de aanrakingsparallel of de snijparallellen door een cirkel in de kaart worden voorgesteld en een gelijkmatige vervorming der afbeelding vereischt, dat alle punten, welke op den bol op gelijke afstanden van die aanrakings- of snijparallel liggen, in de kaart eveneens op gelijke afstanden van de afbeelding dier parallel gelegen zijn, zoo zullen bij alle normale projecties op de ontwikkelbare vlakken de parallellen als concentrische cirkels moeten worden afgebeeld en de meridianen door stralen dier cirkels. Is het ontwikkelbare vlak een cylindermantel, dan gaat dit ook door, slechts ligt het gemeenschappelijk middelpunt in dat geval op oneindigen afstand.

De schaal wederom buiten beschouwing latende, kan de straal der kaartparallellen, evenals bij de projecties op het platte vlak, in een functie van den topafstand (bij de beperking in den aanhef van dit hoofdstuk gemaakt: den poolsafstand) worden uitgedrukt.

Bij de indeeling is verklaard, dat de azimuthale en cylinder projecties grensgevallen zijn der kegelprojectie en de drie groepen onderling zijn te onderscheiden door de waarde die n, de verhouding van de hoeken tusschen twee kaartmeridianen en de overeenkomstige bolmeridianen bezit. Ook n kan in een functie van den poolsafstand worden uitgedrukt.





Zij in nevenstaande figuur de cirkel BP een gedeelte van een meridiaan en CP de aardas. Stel dat een omhullende kegel, waarvan de top P′ in de verlengde aardas ligt, den parallelcirkel van B raakt. Wordt een vlak gebracht door BC en P', dan snijdt dit vlak den kegelmantel volgens de beschrijvende lijn AP'. Wordt de mantel langs deze lijn opengesneden en ontwikkeld, dan wordt de sector $P'B'B'$ verkregen. Voor den aardstraal $= 1$ is: $BP' = tg\ \delta_0$ en de boog $B'B\ B' =$ lengte bolparallel $= 2\ \pi\ sin\ \delta_0$.

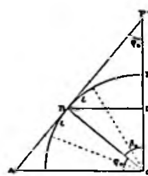
De omtrek van den vollen cirkel met BP' beschreven is $2\ \pi\ tg\ \delta_0$, dus de middelpuntshoek van den sector is $360° \dfrac{sin\ \delta_0}{tg\ \delta_0} = 360°\ cos\ \delta_0$.

De hoek λ, waaronder twee meridianen op den bol elkander snijden, wordt dus $\lambda \cos \delta_0$ in de kaart en bijgevolg is in dit geval, waarbij de aanrakingsparallel *equidistant* wordt afgebeeld, $n = \cos \delta_0$.

De formule voor h, gevonden bij de azimuthale projectie (blz. 16), blijft bij de kegelprojectie onveranderd $= \frac{dm}{d\delta}$; die voor k gaat, zooals zonder verderen uitleg duidelijk is, over in $\frac{nm}{\sin \delta}$.

De gewone kegelprojectie of de kegelprojectie met equidistante middenparallel en equidistante meridianen. Wordt verlangd dat niet alleen de middenparallel, maar ook de middenmeridiaan equidistant wordt afgebeeld, dan blijft n de waarde $\cos \delta_0$ houden. De straalformule wordt $m = tg\, \delta_0 - bg\, \varepsilon$, waarin $bg\, \varepsilon$ den werkelijken afstand weergeeft van de parallellen aan weerszijden van de middenparallel en dus het negatieve teeken verkrijgt, als de weer te geven parallel aan de andere zijde der middenparallel ligt dan het gemeenschappelijk middelpunt van de kaartparallellen.

De meridianen houden in projectie dus hunne ware lengte; de parallellen worden — behalve de middelste — vergroot, daar de kegel den bol over den middenparallel raakt, doch overigens buiten den bol ligt. Aangezien meridianen en parallellen in de kaart loodrecht op elkaar staan, zullen de assen der ellips van vervorming langs deze lijnen vallen en wel de kleine as langs de meridianen, de groote as langs de parallellen. Van een bolparallel met poolsafstand δ is de straal $\sin \delta$, de lengte $2\pi \sin \delta$; van de overeenkomstige kaartparallel de lengte $2\pi (tg\, \delta_0 - bg\, \varepsilon) \cos \delta_0$, aangezien de verhouding der lengten van alle kaartparallellen tot de omtrekken der volle cirkels met hunne stralen beschreven $= n$ is.



$$\text{Dus } \frac{\text{kaartparallel}}{\text{bolparallel}} = \frac{(tg\, \delta_0 - bg\, \varepsilon) \cos \delta_0}{\sin \delta} = \frac{\sin \delta_0 - bg\, \varepsilon \cos \delta_0}{\sin \delta} = a.$$

$$\text{Daar } b = 1 \text{ is wordt } S \text{ eveneens } = \frac{\sin \delta_0 - bg\, \varepsilon \cos \delta_0}{\sin \delta}$$

$$\text{en } \sin \omega = \frac{a - b}{a + b} = \frac{\sin \delta_0 - bg\, \varepsilon \cos \delta_0 - \sin \delta}{\sin \delta_0 - bg\, \varepsilon \cos \delta_0 + \sin \delta}$$

Uit deze laatste uitdrukking blijkt, dat de projectie niet conform is, slechts op de middenparallel waarvoor $a = 1$ is, zal de hoekvervorming nul zijn, vandaar groeit zij aan met toenemende waarden van ε. Voor de pool is $a = \infty$, hetgeen begrijpelijk is, daar de figuur doet zien dat het poolpunt steeds door een lijn wordt voorgesteld. Een kaart in deze projectie mag dus, op straffe van belangrijke vervorming, niet over groote afstanden aan weerszijden van den middenparallel worden uitgebreid.

In onderstaande tabel zijn de vervormingen opgenomen voor drie breedten van de middenparallel, waarbij b steeds $= 1$ is.

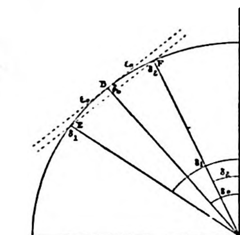
$\delta_0 = 67^\circ\ 30'$			$\delta_0 = 45^\circ$			$\delta_0 = 22^\circ\ 30'$		
δ	$2\,\omega$	$a = S$	δ	$2\,\omega$	$a = S$	δ	$2\,\omega$	$a = S$
45°	5° 9′	1.094	30°	2° 28′	1.044	10°	2 25	1.043
55	1 28	1.026	35	1 0	1.018	15	0 39	1.011
60	0 31	1.009	40	0 14	1.004	20	0 3	1.001
65	0 3	1.001	45	0 0	1.000	22 30	0 0	1.000
67 30	0 0	1.000	50	0 12	1.004	25	0 3	1.001
70	0 3	1.001	55	0 47	1.014	30	0 25	1.007
75	0 29	1.008	60	1 42	1.030	35	1 3	1.019
80	1 18	1.023				45	3 2	1.054
90	4 6	1.074						

Voor $\delta_0 = 45^\circ$ is de constante $n = \cos 45^\circ = 0.701$; twee bolmeridianen die elkaar b. v. onder een hoek van 5° snijden, doen dit op de kaart onder een hoek van $5^\circ \times 0 . 701 = 3^\circ\ 30'$.

De projectie wordt ook wel de projectie van Ptolemeüs genoemd, welke haar het eerst moet hebben toegepast.

De equidistante kegelprojectie van de l'Isle. De eisch kan gesteld worden dat de kaart, behalve de equidistante meridianen, niet één, maar twee equidistante parallellen bezit. Gewoonlijk kiest men hiervoor de parallellen, die zoowel even ver van het midden, als van de N.lijkste en Z.lijkste parallel verwijderd zijn.

Stel dat E en F punten van de parallelcirkels zijn, die in hun ware lengten voorgesteld moeten worden, welke punten volgens den eisch tevens op den waren afstand van de middenparallel verwijderd moeten zijn. Zijn δ_1 en δ_2 de poolsafstanden dier parallellen, $bg\ \varepsilon_0$ hun afstand tot de middenparallel, m_0 de straal van deze laatste op de kaart, dan is:



m_1 de straal van de parallel δ_1 in de kaart $= m_0 + bg\ \varepsilon_0$

m_2 de straal van de parallel δ_2 in de kaart $= m_0 - bg\ \varepsilon_0$

De straalformule voor de middenparallel is nu echter niet $tg\,\delta_0$, aangezien bij toepassing daarvan die parallel en niet die door E en F equidistant afgebeeld zou worden. De straal van den middenparallel moet dus nog bepaald worden.

De lengte van de parallel δ_1 op den bol is gelijk $2\,\pi\ \sin\,(\delta_0 + \varepsilon_0)$; die van de parallel $\delta_2 = 2\,\pi\ \sin\,(\delta_0 - \varepsilon_0)$, welke lengten op de kaart behouden moeten blijven. Door dezen eisch kunnen twee gelijke uitdrukkingen voor n worden gevonden, waaruit deze waarde en de straalformule kunnen worden afgeleid.

Immers $n = \frac{2\,\pi\, sin\,(\delta_0 + \varepsilon_0)}{2\,\pi\,(m_0 + bg\,\varepsilon_0)} = \frac{2\,\pi\, sin\,(\delta_0 - \varepsilon_0)}{2\,\pi\,(m_0 - bg\,\varepsilon_0)}$ dus:

$$(m_0 + bg\,\varepsilon_0)\,n = m_1\,n = sin\,(\delta_0 + \varepsilon_0)$$

$$(m_0 - bg\,\varepsilon_0)\,n = m_2\,n = sin\,(\delta_0 - \varepsilon_0)$$

of:

$$(m_1 + m_2)\,n = sin\,(\delta_0 + \varepsilon_0) + sin\,(\delta_0 - \varepsilon_0)$$

$$(m_1 - m_2)\,n = sin\,(\delta_0 + \varepsilon_0) - sin\,(\delta_0 - \varepsilon_0)$$

Daar $m_1 + m_2 = 2m_0$ en $m_1 - m_2 = 2\,bg\,\varepsilon$:

$$m_0 = \frac{sin\,\delta_0\,cos\,\varepsilon_0}{n} \qquad n = \frac{cos\,\delta_0\,sin\,\varepsilon_0}{bg\,\varepsilon_0}$$

De laatste waarde invoerende in de eerste: $m_0 = tg\,\delta_0\,\frac{bg\,\varepsilon_0}{tg\,\varepsilon_0}$, waardoor de gezochte straal van de middenparallel in de projectie gevonden is.

Een willekeurige parallel met poolsafstand δ, die $\varepsilon = \delta_0 - \delta$ van de middenparallel verwijderd is, heeft dus tot straal:

$$m = tg\,\delta_0\,\frac{bg\,\varepsilon_0}{tg\,\varepsilon_0} - bg\,\varepsilon$$

Uit de afleiding volgt dat de afbeelding noch op den aanrakingskegel noch op den kegel, welke den bol in E en F snijdt, kan plaats hebben. Het kegelvlak treedt bij deze projectie dan ook eigenlijk slechts op als verklarende hulpfiguur, aangezien een eenvoudige meetkundige betrekking tusschen bol en kegel niet bestaat.

De meridianen worden equidistant afgebeeld; h is dus steeds $= 1$. Voor de parallellen is dit ook het geval met δ_1 en δ_2. Voor een willekeurige parallel δ is de verhouding:

$$\frac{\text{kaartparallel}}{\text{bolparallel}} = k = \frac{\left(tg\,\delta_0\,\frac{bg\,\varepsilon_0}{tg\,\varepsilon_0} - bg\,\varepsilon\right)n}{sin\,\delta}$$

De waarde voor n invoerend en ontwikkelende:

$$k = \frac{sin\,\delta_0\,cos\,\varepsilon_0 - bg\,\varepsilon\,cos\,\delta_0\,\frac{sin\,\varepsilon_0}{bg\,\varepsilon_0}}{sin\,\delta}$$

Daar de kaartmeridianen en parallellen elkander loodrecht snijden, is $S = ab = hk = k$.

Uit deze formules is die voor $sin\,\omega$ af te leiden.

Voor de middenparallel δ_0 wordt $\varepsilon = 0$, dus is daarvoor $k = cos\,\varepsilon_0$, welke waarde steeds kleiner is dan 1. De middenparallel wordt dus steeds verkort voorgesteld en wel in kleiner mate, naargelang ε_0 kleiner is.

Voor een middenbreedte van 35° $\delta_1 = 42°\,30'$ en $\delta^2 = 27°\,30'$, zijn de vervormingen opgenomen in onderstaande tabel.

$\delta =$	50°	45°	42°30′	40°	35°	30°	27°30	25°	20°
$2\,\omega$	1° 13′	0° 20′	0° 0′	0° 15′	0° 30′	0° 18′	0° 0′	0° 28′	2° 6′
a	1.0215	1.006	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.008	1.037
b	1.000	1.000	1.000	0.996	0.991	0.995	1.000	1.000	1.000
S	1.0215	1.006	1.000	0.996	0.991	0.995	1.000	1.008	1.037

Daar op de meridianen de lengteverhouding overal 1 is, toont de tabel aan, dat tusschen de kaartparallellen δ_1 en δ_2 de kleine as, daarbuiten de groote as der ellips van vervorming in de richting van de parallelcirkel ligt en — overeenstemmend daarmede — binnen die parallellen de groote as, daarbuiten de kleine as in de richting van den meridiaan. De vervormingen zijn bij deze projectie zeer matig. Vroeger niet veel gebruikt, komt de methode in den laatsten tijd meer in toepassing.

EQUIVALENTE KEGELPROJECTIES.

Voor deze projecties verdient het aanbeveling uit te gaan van de equivalente azimuthale projectie, waarvan de straalformule $f\,(\delta) = 2\,sin\,\frac{\delta}{2}$ reeds bekend is (blz. 18). Aangezien de kegelprojecties slechts van de azimuthale verschillen door de grootte der constante n, kan een azimuthale projectie als een kegelvormige beschouwd worden, waarbij $n = 1$ is. Is n kleiner dan 1 dan snijden de meridianen, zooals reeds verklaard werd, elkander op de kaart niet langer onder dezelfde hoeken λ als op den bol, doch onder kleinere, waarvoor geldt $\lambda' = n\lambda$ en in plaats dat de volle omtrek van een cirkel gebruikt wordt voor een kaartparallel, wordt slechts het n^{de} gedeelte aangewend. Werd dus voor de kegelprojectie dezelfde parallelstraal gebruikt als voor de azimuthale, dan zouden de oppervlakken ingesloten door overeenkomstige parallellen en meridianen op twee kaarten, elk volgens een dezer projecties geteekend, tot elkander staan als n tot 1 en equivalentie zou bij de kaart, vervaardigd volgens de kegelprojectie, niet aanwezig zijn. Gelijke oppervlakken zouden bij beide projecties echter weer verkregen worden als men den straal van de parallel der kegelprojectie dusdanig vergrootte, dat het oppervlak van den sector gelijk werd aan dat van den vollen cirkel, ingesloten door de overeenkomstige parallel van de azimuthale projectie.

Zij de straal van de kaartparallel bij de azimuthale projectie m, de gezochte straal bij de kegelprojectie m_1 dan zou dus $n\,\pi\,m_1^2 = \pi\,m^2$ moeten zijn, waaruit $m_1 = \dfrac{2\,sin\,\frac{\delta}{2}}{\sqrt{n}}$.

Uit de formules $h = \dfrac{dm}{d\,\delta}$ en $k = \dfrac{nm}{sin\,\delta}$ (blz. 24) volgt

$$h = \frac{1}{\sqrt{n}}\,cos\,\frac{\delta}{2} \qquad k = sec\,\frac{\delta}{2}\,\sqrt{n}.$$

De grootste van deze beide waarden is de halve groote as a, de kleinste de halve kleine as b der ellips van vervorming. n een echte breuk zijnde, dus ook $\sqrt{n} < 1$, zal bij elke equivalente projectie een parallelcirkel δ_0 voorkomen, waarvoor $\cos \frac{1}{2} \delta_0 = \sqrt{n}$ is, dus $h = k = 1$. Die parallel wordt derhalve equidistant afgebeeld en de hoekvervorming ter plaatse is 0. Naarmate verder van die parallel wordt afgeweken, nemen de vervormingen toe. Is $\delta < \delta_0$ dan is $\cos \frac{\delta}{2} > \cos \frac{\delta_0}{2}$ en dus

$$a = \frac{\cos \frac{\delta}{2}}{\cos \frac{\delta_0}{2}} \qquad b = \frac{\cos \frac{\delta_0}{2}}{\cos \frac{\delta}{2}}$$

Voor $\delta > \delta_0$ wisselen de waarden van a en b om.

De equivalente kegelprojectie op den aanrakingskegel. Wanneer een equivalente projectie wordt ontworpen op den kegel, welke den bol raakt aan den middenparallel δ_1 van het af te beelden gedeelte, moet volgens het bovenstaande de straal van die parallel $\frac{2 \sin \frac{\delta_1}{2}}{\sqrt{n}}$ zijn. Tevens moet echter die straal, volgens het vroeger behandelde, gelijk $tg\ \delta_1$ zijn. Hieruit volgt dat n een zoodanige waarde moet hebben, dat de beide uitdrukkingen voor den straal aan elkander gelijk zijn, of $n = \frac{\cos^2 \delta_1}{\cos^2 \frac{\delta_1}{2}}$.

Hieruit blijkt dat de middenparallel bij deze projectie niet equidistant wordt afgebeeld, want daarvoor wordt, zooals eerder gebleken is, vereischt $n = \cos \delta_1$ (blz. 24). Boven werd dan ook reeds gevonden dat de parallel δ_0, welke equidistant wordt afgebeeld, wordt bepaald door $n = \cos^2 \frac{\delta_0}{2}$. De waarde van δ_0 kan uit die van δ_1 worden afgeleid door middel van de vergelijking:

$$\cos \frac{\delta_0}{2} = \sqrt{n} = \frac{\cos \delta_1}{\cos \frac{\delta_1}{2}}$$

Is bijv. $\delta_1 = 40^\circ$, dan volgt hieruit: $n = 0.665$, $\delta_0 = 70^\circ\ 47'$ waaruit blijkt dat, bij betrekkelijk geringe uitgebreidheid van het af te beelden gedeelte van den bol, bij deze projectie de parallel, welke equidistant zou worden afgebeeld, ver buiten de grenzen der kaart valt. Uithoofde daarvan vindt de methode geen toepassing.

Equivalente kegelprojectie met equidistante middenparallel, volgens Lambert. Equidistantie van de middenparallel is een gewenschte eigenschap voor een kaart, te meer nog wanneer zij gepaard gaat met equivalentie. Worden deze beide eischen gesteld, dan kan volgens het onmiddellijk voorgaande de aanrakingskegel niet als hulpvlak gebruikt worden en het vraagstuk moet langs anderen weg opgelost worden.

Zij δ_0 de poolsafstand van de middenparallel, welke equidistant moet worden afgebeeld. De bolstraal van die parallel is $sin\ \delta_0$, de omtrek $2\ \pi\ sin\ \delta_0$. Op grond van den eisch van equivalentie moet de straal van de overeenkomstige kaartparallel $\dfrac{2\ sin\ \frac{\delta_0}{2}}{\sqrt{n}}$ zijn. Van den omtrek van den cirkel met dezen straal getrokken, wordt slechts een deel gebruikt om de parallel af te beelden en wel een zoodanig stuk dat $2\ \pi \dfrac{2\ sin\ \frac{\delta_0}{2}}{\sqrt{n}} .\ n = 2\ \pi\ sin\ \delta_0$ is, waaruit volgt als boven $n = cos^2 \dfrac{\delta_0}{2}$. De straal van de middenparallel op de kaart is dus $\dfrac{2\ sin\ \frac{\delta_0}{2}}{cos\ \frac{\delta_0}{2}} = 2\ tg\ \dfrac{\delta_0}{2}$.

De stralen der overige parallellen worden als volgt bepaald.

Het boloppervlak begrensd door de middenparallel is $= 2\ \pi\ h$ als $r = 1$ is. De pijl h is een der rechthoekzijden van den driehoek, waarin de koorde van den hoek δ_0 de hypothenusa is en de straal van de parallel δ_0 de andere rechthoekzijde, dus $h^2 = 4\ sin^2 \tfrac{1}{2}\ \delta_0 - sin^2\ \delta_0 = 4\ sin^4 \tfrac{1}{2}\ \delta_0$ en $2\ \pi\ h = 4\ \pi\ sin^2 \tfrac{1}{2}\ \delta_0$.

Zij δ de poolsafstand van een willekeurige parallel en is $\delta < \delta_0$, dan heeft de zône tusschen beide parallellen een oppervlak

$$O = 4\ \pi\ \left(sin^2 \frac{\delta_0}{2} - sin^2 \frac{\delta}{2}\right).$$

Op de kaart wordt O voorgesteld door het verschil in oppervlak van twee concentrische sectoren met gelijken tophoek. De straal van den grootsten sector is bekend, die van den kleinsten wordt gezocht. Stel de laatste x, dan is genoemd verschil in oppervlak $= n\ \pi\ \left(4\ tg^2 \dfrac{\delta_0}{2} - x^2\right)$.

Volgens den eisch van equivalentie moet O gelijk zijn aan deze waarde, dus $4\ \pi \left(sin^2 \dfrac{\delta_0}{2} - sin^2 \dfrac{\delta}{2}\right) = n\ \pi\ \left(4\ tg^2 \dfrac{\delta_0}{2} - x^2\right)$

waaruit $x^2 = 4\ tg^2 \dfrac{\delta_0}{2} - \dfrac{4}{n} \left(sin^2 \dfrac{\delta_0}{2} - sin^2 \dfrac{\delta}{2}\right)$.

De gevonden waarde $n = cos^2 \dfrac{\delta_0}{2}$ invoerende, wordt $x = \dfrac{2\ sin\ \frac{\delta}{2}}{cos\ \frac{\delta_0}{2}}$

Daar de middenparallel equidistant wordt afgebeeld is voor deze parallel $a = b = 1$ en $\omega = 0$. (Zie blz. 28). Voor een willekeurige andere parallel δ wordt k als volgt gevonden.

De bolstraal is $sin\ \delta$, de kaartstraal $\frac{2\ sin\ \frac{\delta}{2}}{cos\ \frac{\delta_0}{2}}$. De kaartparallel heeft een lengte van $2\,\pi\,n\,\frac{2\ sin\ \frac{\delta}{2}}{cos\ \frac{\delta_0}{2}}$ of $n = cos^2\ \frac{\delta_0}{2}$ invoerende: $4\ \pi\ sin\ \frac{\delta}{2}\ cos\ \frac{\delta_0}{2}$

dus $\frac{\text{kaartparallel}}{\text{bolparallel}} = k = \frac{4\ \pi\ sin\ \frac{\delta}{2}\ cos\ \frac{\delta_0}{2}}{2\ \pi\ sin\ \delta} = \frac{cos\ \frac{\delta_0}{2}}{cos\ \frac{\delta}{2}}$.

Uit $hk = 1$ volgt $h = \frac{cos\ \frac{\delta}{2}}{cos\ \frac{\delta_0}{2}}$. De grootste dezer waarden is de halve groote as a, de kleinste de halve kleine as b der ellips van vervorming (vergelijk hetgeen verkregen werd bij de inleiding der equivalente kegelprojecties).

Met deze gegevens kunnen voor een bepaalde waarde van δ_0 de vervormingen berekend worden. Voor een poolsafstand van 40° zijn zij in onderstaande tabel opgenomen, waarbij $S = ab = 1$.

δ	$2\ \omega$	a	b	δ	$2\ \omega$	a	b
10°	6° 40′	1.060	0.943	60°	9° 20′	1.085	0.921
20	5 22	1.048	0.954	70	15 40	1.147	0.871
30	3 6	1.028	0.972	80	23 12	1.226	0.815
40	0 0	1.000	1.000	90	32 10	1.329	0.752
50	4 8	1.036	0.964				

Bij de topsafstanden kleiner dan 40° ligt a in den meridiaan, b in de parallel; bij die grooter dan 40° is dit omgekeerd. Hieruit volgt dat de parallellen van hoogere breedte dan die, welke equidistant wordt afgebeeld, verkort worden, terwijl de parallellen van lagere breedte worden vergroot. Voorts werd voor n bij de equivalente projectie op den kegel, rakende aan de parallel van 40° een waarde van 0.665 gevonden. In het beschouwde geval is $n = 0.883$. Uit een en ander blijkt dat het hulpvlak thans een kegel met kleiner tophoek is, dan in het eerste geval, welke den bol snijdt volgens de equidistant afgebeelde middenparallel.

De equivalente projectie van Lambert is een van de weinige kegelprojecties, welke dadelijk kenbaar is door het merkbaar kleiner worden der afstanden tusschen de parallellen bij toenemende topsafstanden.

CONFORME KEGELPROJECTIES.

Teneinde de straalformule voor deze projecties te vinden, wordt uitgegeven van de formules voor h en k. Hoekgelijkheid wordt bereikt als $h = k$ is, dus:

$$\frac{dm}{d\,\delta} = \frac{nm}{\sin\delta} \text{ of } \frac{dm}{m} = \frac{nd\,\delta}{\sin\delta}$$

Integreerende: $lm = nl\ tg\frac{\delta}{2} + lc$ of $m = c\left(tg\ \frac{\delta}{2}\right)^n$ waarin de exponent n de constante der projecties is.

De andere constante c, voortspruitende uit de integratie, is de straal van den kaartequator, hetgeen blijkt als $\delta = 90^\circ$ gesteld wordt, m wordt dan $c \times 1^n = c$. Wordt deze waarde van m m_a genoemd, dan is dus de algemeene formule $m = m_a\left(tg\ \frac{\delta}{2}\right)^n$.

De lengte van de kaartparallel is $n.\ 2\pi\ m$ en de verhouding

$$\frac{\text{kaartparallel}}{\text{bolparallel}} = \frac{n.\ 2\pi\ m}{2\ \pi\ \sin\delta} = \frac{nm}{\sin\delta} = \frac{nm_a\left(tg\ \frac{\delta}{2}\right)^n}{\sin\delta}$$

Uit deze uitdrukking kan de grootte van den straal van den cirkel, waarin bij deze projecties de ellips van vervorming overgaat, berekend worden. De formule kan herleid worden tot $a = b = \frac{nm_a}{2} \cdot \frac{\left(\sin\ \frac{\delta}{2}\right)^{n-1}}{\left(\cos\ \frac{\delta}{2}\right)^{n+1}}$

waaruit blijkt dat met toenemenden poolsafstand de lengte- en oppervlakvervorming toenemen. Voor $\delta = 0^\circ$, dus aan de pool, is $a = b = 0$; voor $\delta = 90^\circ$, dus aan den equator, is $a = b = nm_a$.

De conforme kegelprojectie met equidistante middenparallel. Met den eisch van hoekgelijkheid kan die van lengtegelijkheid voor de middenparallel verbonden worden. Zij de poolsafstand van deze parallel δ_0, dan moet haar straal gelijk $tg\ \delta_0$ zijn, wil aan den eisch van equidistantie voldaan worden, terwijl de constante $n = \cos\delta_0$ is. Bijgevolg moet de straal m_0 van de middenparallel tegelijkertijd voldoen aan $tg\,\delta_0$ en aan $m_a\left(tg\ \frac{\delta_0}{2}\right)^{\cos\ \delta_0}$

waaruit volgt $m_a = \frac{tg\ \delta_0}{\left(tg\,\frac{\delta_0}{2}\right)^{\cos\ \delta_0}}$ en de straalformule voor de andere parallellen (δ)

$$m = m_a\,(tg\ \frac{\delta}{2})^{\cos\ \delta_0}.$$

Volgens het boven behandelde is $a = b = nm_a \frac{(tg \frac{\delta}{2})^n}{sin\ \delta}$.

Voert men de waarden van n en m_a in:

$$a = cos\ \delta_0 \frac{tg\ \delta_0}{\left(tg \frac{\delta_0}{2}\right)^{cos\ \delta}} \cdot \frac{\left(tg \frac{\delta}{2}\right)^{cos \delta_0}}{sin\ \delta} = \frac{sin\ \delta_0}{sin\ \delta} \left(\frac{tg \frac{\delta}{2}}{tg \frac{\delta_0}{2}}\right)^{cos \delta_0}.$$

Op de parallel δ_0 wordt dus $a = 1$, zooals deze formule toont; op alle andere is $a > 1$, zooals blijkt uit onderstaande tabel, welke de vervormingen bevat voor een breedte van 30° (poolsafstand van 60°)

δ	90°	75°	60°	45°	30°	15°	0°
$a = b$	1.140	1.034	1.000	1.037	1.180	1.598	∞
$S = a^2$	1.299	1.068	1.000	1.076	1.392	2.553	∞

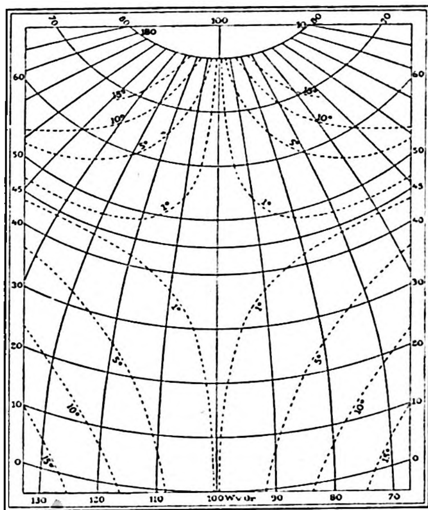
De conforme kegelprojectie is uitgedacht door Lambert in 1772.

GEWIJZIGDE KEGELPROJECTIE VAN BONNE.

Teneinde de vergrooting te vermijden, welke bij de kegelprojectie met equidistante middenparallel en equidistante middenmeridianen (blz. 24) optreedt in de afbeelding der overige parallellen, bedacht Bonne in 1752 deze laatste ook een zelfde lengte te geven als zij op den bol hebben. De parallellen zijn dus concentrische cirkelbogen, geconstrueerd met de straalformule $m = tg\ \delta - bg\ \varepsilon$, doch voor constructie van de meridianen wordt niet gebruikt de formule $\lambda_1 = \lambda\ cos\ \delta_0$. In plaats daarvan wordt vanaf den rechtlijnigen middenmeridiaan langs elke parallel de grootte afgezet, welke λ lengtegraden op die parallel hebben en door de verkregen punten een kromme lijn getrokken. De meridianen worden daardoor in het algemeen krommen van hoogere orde in plaats van rechte lijnen en snijden de parallellen niet onder rechte hoeken. Slechts met den rechtlijnigen middenmeridiaan is dit het geval. Het eenvoudig meetkundig verband, dat dus bestaat bij de equidistante kegelprojectie, is bij de projectie van Bonne gewijzigd, hetgeen is gedaan om oppervlakgelijkheid te verkrijgen. Slechts op den middenmeridiaan vallen de assen der ellips van vervorming samen met dien meridiaan en de parallellen. Aangezien de kaartparallellen overal op afstanden gelijk aan die op den bol uit elkander liggen, zullen de kaartmeridianen $sec.\ \theta$ maal zoo groot zijn als de bolmeridianen, als θ den hoek voorstelt waaronder de parallellen en meridianen elkander snijden.

Volgens bladz. 9 is $ab = hk\ cos\ \theta$ en daar de kaartparallellen op juiste grootte worden weergegeven, zal $ab = 1$ zijn, waarmede de equivalentie der projectie is aangetoond.

De formules van vervorming zullen niet worden afgeleid. Om een denkbeeld der belangrijke hoekmisvorming te geven, welke bij deze projectie optreedt, wordt verwezen naar nevensgaand kaartje voor $\varphi_0 = 45^\circ$, ontleend aan het in het voorbericht genoemde werk van Dr. K. Zoppritz en Dr. A. Bludeau, waarin lijnen van gelijke hoekvervorming zijn getrokken.



Zooals gezien wordt, vormen die lijnen eigenaardige krommen en nemen de vervormingen toe van af den middenmeridiaan en de middenparallel.

De projectie van Bonne is om haar equivalentie voor landkaarten in vrij algemeen gebruik geweest, hetgeen eerst verminderd is nadat men kennis kreeg van hare belangrijke hoekmisvorming. Zij is hier behandeld omdat de topographische kaart van Nederland in deze projectie is uitgevoerd. Ook daarbij zal zij echter vermoedelijk in de toekomst vervallen.

POLYKONISCHE PROJECTIES.

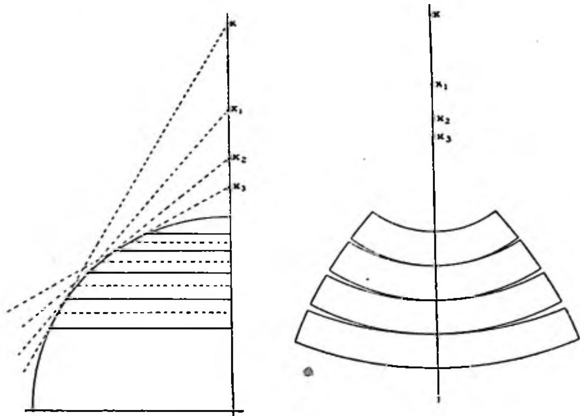
Zooals op bladz. 14 gezegd is, staat de groep der polykonische projecties buiten de gekozen indeeling. Aangezien zij echter het nauwst verwant zijn tot de kegelprojecties, zullen zij hier behandeld worden. Bij alle projecties van deze groep, welke het tot de praktijk gebracht hebben, worden de parallellen op dezelfde manier geconstrueerd; de verschillen bestaan in de wijzen van constructie der meridianen. Is voor de constructie der parallellen het eenvoudig meetkundig verband der kegelprojecties reeds verlaten, ten tweede male geschiedt dit voor de meridiaanconstructie.

Van de gebruikte methoden zal alleen de navolgende behandeld worden.

De polykonische projectie der Coast Survey van de Vereenigde Staten. Als hulpvlak wordt daarbij niet een kegelmantel gebruikt, doch een stelsel van afgeknotte kegels, waarvan de toppen alle in de verlengde aardas liggen. Het af te beelden gebied wordt daarbij gedacht in smalle zônen verdeeld te zijn en elke zône afgebeeld op den kegelmantel, welke haar in de middenparallel aanraakt. Het bovenvlak van den afgeknotten mantel, waarop de meest naar den equator gelegen zône wordt afgebeeld, vormt

het grondvlak van den mantel voor de naastliggende zône enz. Worden deze projectie-vlakken ontwikkeld, zoodanig dat de middenmeridiaan een rechte lijn vormt, dan zullen de uiteinden der mantelstukken elkander niet raken, doch uit elkander wijken. Worden de zônen echter zeer smal genomen, dan hebben die gapingen uit een praktisch oogpunt geen beteekenis.

Het net wordt gevormd door parallelbogen met een straal gelijk aan den *tg.* van den poolsafstand van de betrokken parallel.



Op de parallelbogen worden de lengteverschillen van uit den rechten middenmeridiaan afgezet en de punten voor den zelfden meridiaan vereenigd. De constructie der meridianen komt dus overeen met de wijze gevolgd bij de projectie van Bonne.

Bij de constructie wordt eerst de middenmeridiaan getrokken en daarop de snijpunten van de te trekken parallellen aangegeven, door afstanden op schaal gelijk aan de meridiaanbogen tusschen die parallellen op den bol af te zetten. Van uit die snijpunten worden de stralen der parallelbogen volgens de formule $m = tg\ \delta$ op den middenmeridiaan afgezet, waardoor de middelpunten der kaartparallellen verkregen worden en daarna die parallellen getrokken. Op de verkregen parallellen worden vervolgens op schaal de lengteverschillen equidistant afgezet en de meridianen getrokken door de overeenkomstige deelpunten te vereenigen. In de praktijk worden de parallellen verkregen door rechthoekige coördinaten te berekenen en af te zetten van verschillende punten van deze kromme lijnen, ten opzichte van de snijpunten der te trekken parallellen met den middenmeridiaan.

Het net bestaat dus uit gebogen (of gebroken) meridianen en parallellen, met uitzondering van den rechten middenmeridiaan.

De meridianen en parallellen snijden elkander nagenoeg rechthoekig. Slechts voor landen welke zeer uitgestrekt zijn in eene N-Z.richting, bij geringe

uitbreiding in een richting loodrecht daarop, heeft de methode voordeelen.
De berekening der vervormingen dezer projectie, welke noch conform is, noch equivalent, is minder eenvoudig. In verband met de geringe toepassing, welke de projectie buiten Amerika vindt, wordt zij achterwege gelaten. Voor vergelijkingen zijn echter in onderstaande tabellen de waarden van $2\ \omega$ en $S = ab$ opgenomen, waaruit de bruikbaarheid blijkt voor het bovengestelde geval.

φ \ λ	0°		15		30		45		60		90	
	$2\ \omega$	S	$2\ \omega$	S	$2\ \omega$	S	$2\ \omega$	S	$2\ \omega$	S	$2\ \omega$	S
0°	0°0′	1.000	1°56′	1.034	7°21′	1.137	15°20′	1.308	24°51′	1.548	44°51′	2.234
15	0 0	1.000	1 48	1.032	6 53	1.128	14 26	1.287	23 39	1.508	42 49	2.135
30	0 0	1.000	1 27	1.026	5 36	1.102	11 52	1.228	19 33	1.402	36 43	1.879
45	0 0	1.000	0 58	1.017	3 46	1.068	8 9	1.150	13 43	1.262	26 52	1.556
60	0 0	1.000	0 29	1.009	1 55	1.034	4 12	1.074	7 13	1.128	14 51	1.264
75	0 0	1.000	0 8	1.002	0 31	1.009	1 9	1.020	2 1	1.034	4 18	1.068
90	0 0	1.000	0 0	1.000	0 0	1.000	0 0	1.000	0 0	1.000	0 0	1.000

HOODFSTUK III.

CYLINDERPROJECTIES.

Deze projecties vormen een grensgeval van de kegelprojecties, doordat de constante $n = 0$ is. De kaartmeridianen of hun verlengden snijden elkander dus niet, doch loopen evenwijdig; het middelpunt der parallellen ligt op oneindigen afstand en ook deze lijnen zijn recht en evenwijdig. Normale cylindrische projecties zijn afbeeldingen van het boloppervlak op het platte vlak, waarbij de meridianen weergegeven worden door een stel rechte evenwijdige lijnen en evenzoo de parallellen. Beide stellen snijden elkander onder rechte hoeken.

Raakt de cylinder den bol langs den evenaar, dan ligt het voor de hand de meridianen af te beelden door de snijlijnen van de meridiaanvlakken met den mantel. Wordt deze vervolgens langs een dergelijke snijlijn tot een plat vlak ontwikkeld, dan wordt een gedeeltelijk net verkregen, bestaande uit den equidistant afgebeelden equator en loodrecht daarop staande, dus evenwijdige meridianen, welke op den equator op waren afstand uit elkander liggen. Volgens welk beginsel nu verder de parallellen afgebeeld worden, vast staat dat zij alle even groot worden en gelijk aan den equator. Hieruit volgt dat normale cylindrische projecties niet geschikt zijn voor de afbeelding van streken, welke over een belangrijk breedte-verschil strekken.

Verder is het duidelijk dat de straalformule bij deze projectie niet voorkomt. Het is aangewezen deze te vervangen door den afstand y van de betrokken parallel tot den equator, uit te drukken in functie der breedte, dus $y = f\ (\varphi)$.

Als gevolg van de vervanging der straalformule door $y = f(\varphi)$, moeten ook de vergelijkingen $h = \frac{dm}{d\,\delta}$ en $k = \frac{m}{sin\,\delta}$ (blz. 16) door andere worden vervangen. Uit het bovenbehandelde volgt $h = \frac{dy}{d\varphi}$ en $k = sec\,\varphi$. Voor de afbeelding van zônen, ver van den equator gelegen, is het doelmatig den raakcylinder te vervangen door een, welke het boloppervlak volgens twee parallellen van gelijke, doch ongelijknamige breedte snijdt. Wordt in plaats van een raakcylinder een snijcylinder gebezigd, waardoor de equator niet langer equidistant in de projectie voorkomt, dan is $k = p\,sec\,\varphi$, waarin p een waarde kleiner dan 1 voorstelt.

Eindelijk volgt uit de omstandigheid, dat de meridianen en parallellen elkander onder rechte hoeken snijden, dat de assen der ellips van vervorming in de richtingen dier netlijnen vallen.

De equidistante cylinderprojectie met equidistanten equator of de vierkantige platkaart.

Deze projectie wordt verkregen door den cylinder langs den equator te laten raken, de meridianen te trekken op waren afstand, gemeten langs den equator, en de parallellen eveneens op hun waren afstand van den equator. De aarde als volkomen bol aannemende, zal dus een net van volkomen vierkanten worden verkregen.

$y = bg\,\varphi$ zijnde, is volgens de formules voor h en k:

$$h = b = 1 \quad \text{en}\; k = a = sec\,\varphi \quad S = ab = sec\,\varphi \quad sin\,\omega = \frac{1 - cos\,\varphi}{1 + cos\,\varphi} = tg^2\,\tfrac{1}{2}\,\varphi.$$

In onderstaande tabel zijn de vervormingen opgenomen, berekend volgens deze formules.

φ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$2\,\omega$	0° 0′	1° 59′	8° 14′	19° 45′	38° 57′	72° 9′	180° 0′
a	1 . 000	1 . 035	1 . 155	1 . 414	2 . 000	3 . 864	∞
b	1 . 100	1 . 000	1 . 000	1 . 000	1 . 000	1 . 000	1.000
$S = ab$	1 . 000	1 . 035	1 . 155	1 . 414	2 . 000	3 . 864	∞

Uit de tabel blijkt dat deze hoogst eenvoudige projectie slechts op lage breedte te gebruiken is. Toch is zij eeuwen lang aangewend voor zeekaarten en eerst na MERCATOR's tijd gaandeweg in onbruik geraakt.

De equidistante cylinderprojectie met equidistante middenparallel of rechthoekige platkaart.

Deze projectie is, op te vatten als een projectie op een cylinder, welke den bol volgens twee, op gelijken afstand van den equator gelegen parallellen snijdt. Voor deze parallellen worden gekozen de middenparallel van het af te beelden aardoppervlak en die van gelijke, doch ongelijknamige breedte. De middenparallel wordt dus equidistant afgebeeld en de overige gelijk aan deze. De middenmeridiaan wordt equidistant ingedeeld en door de deelpunten de parallellen getrokken.

De rechthoeken welke zoodoende ontstaan, wijken te meer van vierkanten af, naarmate de middelbreedte grooter is.

Op de equidistante meridianen is $h = 1$. De verhouding $\frac{\text{kaartparallel}}{\text{bolparallel}} = k$ is gelijk $\frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi}$, waarin φ_0 de middelbreedte en φ een willekeurige breedte in de kaart voorstelt.

Is $\varphi > \varphi_0$, dan is $k > 1$ en omgekeerd is $k < 1$, als $\varphi < \varphi_0$ is.

Bijgevolg ondergaan alle parallellen, gelegen in de zône tusschen de breedten φ_0 en $-\varphi_0$, een verkorting; alle parallellen buiten die zône een verlenging ten opzichte van hunne grootte op den bol.

Voor die zône is dus: $h = a = 1$ en $k = b < 1$; $\sin \omega = \frac{\cos \varphi - \cos \varphi_0}{\cos \varphi + \cos \varphi_0}$;

buiten die zône: $h = b = 1$ en $k = a > 1$; $\sin \omega = \frac{\cos \varphi_0 - \cos \varphi}{\cos \varphi_0 + \cos \varphi}$;

in beide gevallen $S = ab = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi}$.

Aangezien de projectie niet conform is, zal de rechte lijn tusschen twee punten op de kaart getrokken niet de loxodroom tusschen die punten weergeven. De standvastige hoek waaronder de laatste de meridianen op aarde snijdt, zal op verschillende gedeelten der kaart verschillende bedragen vervormd worden.

Onderstaande tabellen geven een overzicht van de vervormingen voor middelbreedten van 45° en 20°.

Middelbreedte = 45°.

φ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
2ω	19° 45′	17° 48′	11° 36′	0° 0′	19° 45′	55° 18′	180° 0′
a	1.000	1.000	1.000	1.000	1.414	2.732	∞
b	0.707	0.732	0.816	1.000	1.000	1.000	1.000
S	0.707	0.732	0.816	1.000	1.414	2.732	∞

Middelbreedte = 20°.

φ	0°	5°	15°	20°	25°	35°	40°
2ω	3° 34′	3° 21′	1° 35′	0° 0′	2° 5′	7° 52′	11° 41′
a	1.000	1.000	1.000	1.000	1.037	1.147	1.227
b	0.939	0.943	0.973	1.000	1.000	1.000	1.000
S	0.939	0.943	0.973	1.000	1.037	1.147	1.227

De projectie is ongeveer 100 jaar na C. uitgedacht door MARINUS VAN TYRUS en veelvuldig voor land- en zeekaarten toegepast, doch althans voor de eerste in lateren tijd in onbruik geraakt. Voor zeekaarten is zij langer gehandhaafd, gedeeltelijk ter vervanging van de vierkantige platkaart, doch thans wordt zij nog slechts in uitzonderingsgevallen gebruikt.

De equivalente cylinderprojectie met equidistanten equator van Lambert.

De equator wordt equidistant als rechte lijn afgebeeld en de meridianen als loodrecht daarop staande lijnen, op hun waren afstand gemeten langs den equator. Nu moet nog de formule bepaald worden, welke den afstand geeft waarop de parallellen in de kaart van den equator verwijderd moeten zijn, opdat equivalentie bestaat. Daarvoor dient de oppervlakte tusschen twee kaartparallellen φ_1 en φ_2 gelijk te zijn aan de oppervlakte der zône, op den bol ingesloten door de overeenkomstige parallellen. Het oppervlak van een dergelijke bolzône is gelijk $2\pi rh$, waarin h, de hoogte, $= sin\ \varphi_1 - sin\ \varphi_2$, zoodat de gezochte formule is $y = sin\ \varphi$.

De kaartparallellen zijn dus identiek met de snijlijnen der uitgebreide parallelvlakken met den cylindermantel.

Daar de kaartparallellen alle even groot als de equator worden afgebeeld, is de verhouding $\frac{\text{kaartparallel}}{\text{bolparallel}} = k = a = sec\ \varphi$ en daar de projectie equivalent is: $hk = 1$ dus $h = b = cos\ \varphi$.

Hieruit volgt $sin\ \omega = \frac{1 - cos^2\ \varphi}{1 + cos^2\ \varphi}$.

Met deze formules zijn de onderstaande vervormingen berekend.

φ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$2\ \omega$	0° 0′	3° 58′	16° 26′	38° 57′	73° 44′	121° 57′	180° 0′
a	1.000	1.035	1.155	1.414	2.000	3.864	∞
b	1.000	0.966	0.866	0.707	0.500	0.259	0.000
S	1 000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

De conforme cylinderprojectie met equidistanten equator van Mercator.

Opdat een normale cylinderprojectie conform zij, moet $a = b$ dus $h = k$ zijn. Wordt de equator equidistant afgebeeld en alle parallellen aan dezen gelijk gemaakt, dan is de verhouding $\frac{\text{kaartparallel}}{\text{bolparallel}} = k = sec\ \varphi$. Teneinde hoekgelijkheid te verkrijgen, moeten dus ook de afstanden van de kaartparallellen tot den equator $sec\ \varphi$ maal grooter afgebeeld worden dan de overeenkomstige afstanden op den bol. $h = \frac{dy}{d\ \varphi}$ moet gelijk $\frac{1}{cos\ \varphi}$ zijn, waaruit volgt $dy = \frac{d\ \varphi}{cos\ \varphi}$ en $y = l.\ tg\ (45° + \frac{\varphi}{2}) + l.\ c = l. \left\{ c\ tg\ (45° + \frac{\varphi}{2}) \right\}$

Voor $\varphi = 0$ moet ook $y = 0$ zijn, waaruit blijkt dat $c = 1$ is en
$y = l.\ tg\ (45^{\circ} + \frac{\varphi}{2}) = 2.30259\ log\ tg\ (45^{\circ} + \frac{\varphi}{2})$

Voor $\varphi = 90^{\circ}$ wordt $y = \infty$, de projectie kan dus niet gebruikt worden om een geheel halfrond voor te stellen.

Voor de vervormingen gelden de formules $a = b = sec\ \varphi$ $S = sec^2\ \varphi$ en $\omega = 0$. Een overzicht van de grootten der vervormingen voor verschillende breedten geeft onderstaande tabel.

$\varphi =$	0°	5	10	15	20	25	30	35	40	45
$a = b$	1.0000	1.0038	1.0154	1.0353	1.0640	1.1034	1.1547	1.2208	1.3054	1.4142
S	1.0000	1.0077	1.0311	1.0718	1.1325	1.2174	1.3333	1.4903	1.7040	2.0000

$\varphi =$	50	55	60	65	70	75	80	85	89	90
$a = b$	1.5560	1.743	2.000	2.366	2.924	3.864	5.739	11.474	57.30	∞
S	2.4200	3.040	4.000	5.599	8.548	14.928	33.160	131.650	3283.0	∞

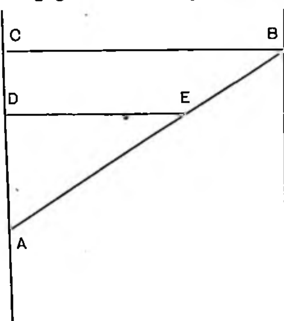
Uit deze tabel blijkt dat de projectie hoogstens tot ongeveer 70° breedte bruikbaar is.

In het algemeen wordt deze projectie voor een groot gedeelte der aarde alleen gebruikt, wanneer het op een juiste voorstelling — wat oppervlakten betreft — weinig aankomt, zooals wind- en regenkaarten, kaarten van zeestroomingen, verbreiding van planten en dieren, maar bovenal voor zeekaarten. Dit laatste voornamelijk vanwege de omstandigheid, dat de loxodroom in deze projectie door een rechte lijn wordt weergegeven. Deze eigenschap deelt zij met geen andere projectie. Immers, doordat de Mercator-projectie een cylindrische is, worden de meridianen en parallellen als rechte lijnen afgebeeld en doordat zij conform is, zal een lijn, welke de meridianen op aarde onder een constanten hoek snijdt, dit ook doen op de kaart. Een stel evenwijdige lijnen kan echter slechts door een rechte onder gelijke hoeken gesneden worden.

Aangezien de equator equidistant wordt afgebeeld, zal alleen om en nabij die lijn de kaart geen lengteverandering geven. Door de snelle toeneming der lengteverandering op eenigen afstand van den equator, kan voor een kaart in deze projectie geen vaste schaal gegeven worden, doch daar de afstanden op een bepaalde breedte in alle richtingen gelijkmatig vergroot worden, zal de schaal van elk punt gelijk zijn aan die van den equator maal $sec\ \varphi$, waarbij φ de breedte van dit punt is en voor een afstand gelijk genomen wordt aan de middelbreedte van dien afstand. Bij het kaartpassen wordt het bezwaar van deze veranderlijke schaal ondervangen, door de randverdeeling te gebruiken.

Het meten van een afstand met de schaal voor de middelbreedte is echter een benadering, aangezien de secanten niet evenredig met de

breedten aangroeien. Een volkomen juiste methode is reeds door MERCATOR aangegeven. Daarbij zet men op den meridiaan van het punt A op de laagste breedte, uitgaande van dat punt, een aantal gelijke deelen af, overeenkomende met het breedteverschil der beide plaatsen in minuten. Voor die gelijke deelen neme men gemakshalve lengte-minuten van de kaart. Door het aldus verkregen punt van den meridiaan wordt de parallel DE getrokken. Vervolgens meet men het stuk van den loxodroom tusschen A en E uit met de lengteminuut als eenheid. Uit de figuur blijkt dat de loxodroom verkleind is in reden van het vergrootte breedteverschil tot het werkelijke en dus de uitmeting van AE met de schaal waarin het werkelijke breedteverschil is uitgezet den juisten afstand tusschen A en B langs den loxodroom geeft.



Aangezien op conforme kaarten de parallellen en meridianen elkander steeds onder rechte hoeken moeten snijden, is de MERCATOR-projectie de eenige conforme projectie met rechte parallellen, of wel de eenige conforme cylinderprojectie.

Wil men in plaats van den equator twee parallellen equidistant afbeelden, dus een projectie op den snijcylinder ontwerpen, in plaats van op den raakcylinder, dan moeten de meridianen op de equidistante parallel φ_0 op een afstand $\lambda \cos \varphi_0$ getrokken worden, waarin λ den afstand tusschen de betrokken meridianen op den equator voorstelt. De afstand y der overige parallellen moet dan, om de conformiteit te behouden, gelijk $\cos \varphi_0 \times l \,.\, tg\, (45^\circ + \frac{1}{2}\, \varphi)$ genomen worden en de geheele methode komt dus slechts neer op een evenredige verkleining der afbeelding.

De netten van wassende kaarten worden volgens den snijcylinder ontworpen, waarbij voor een enkele kaart, welke geen verband houdt met andere, de middelbreedte-parallel equidistant wordt afgebeeld. De verhouding waarin dit gedaan is, wordt veelal — hoewel niet altijd — in breukvorm als de schaal opgegeven. Op Engelsche kaarten onder den naam: „natural scale". Deze schaal is dan slechts juist voor de middelbreedte van de kaart. Aangezien de aangroeiing der vergroote breedten aan de poolzijde van de middenparallel sneller gaat dan de afneming aan de andere zijde, verdient het aanbeveling niet de middenparallel equidistant af te beelden, doch een zooveel meer naar de pool gelegen parallel, dat de juiste numerieke schaal aan beide grenzen der kaart evenveel — zij het met verschillend teeken — afwijkt van de voor de snijparallel geldende.

Een serie van wassende kaarten wordt veelal volgens een zelfde snijcylinder ontworpen, teneinde — bij gelijke numerieke schaal — aan elkander passende kaarten te verkrijgen. Voor de Duitsche zeekaarten b.v. is aangenomen:

de raakcylinder aan den equator voor alle kaarten, waarvan de middelbreedte tusschen 20° Z.b. en 20° N.b. ligt;

de cylinder, welke de aarde op 30° breedte snijdt, voor de kaarten, waarvan de middelbreedte ligt tusschen 20° en 40° breedte, en

de cylinder de aarde snijdende op 53° 5′ voor de kaarten met middelbreedten tusschen 40° en 60° breedte.

De breedte van 53° 5′ is voor de derde zône gekozen, omdat deze breedte op het Noordelijk halfrond de middelbreedte is van de Duitsche kustgebieden.

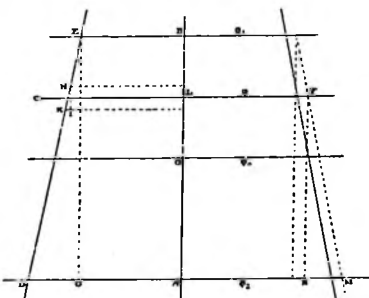
Bij deze indeeling kan de juiste schaal aan de randen der kaarten tot 24 pct. afwijken van de voor de afbeelding dier basisparallellen gekozene.

De projectie is het eerst aangewend door Mercator (GERARD KREMER) op een door hem in 1569 uitgegeven kaart, doch zonder aangifte van de wijze waarop de parallellen getrokken waren. In 1594 berekende EDWARD WHRIGT dat Mercator vermoedelijk de wassende breedten verkregen heeft door de som der secanten van graad tot graad te nemen, waarbij op 45° breedte een fout van 19′ ontstond. WHRIGT heeft daarop sommeering der secanten om de minuut voorgesteld. De mathematische theorie is eerst in 1645 door HENRY BOND gevonden.

Hoewel de projectie de zeevaart groote voordeelen aanbood, kwam zij eerst langzamerhand in gebruik en duurde het tot in de 19de eeuw voor haar toepassing op zeekaarten algemeen werd.

GEWIJZIGDE CYLINDERPROJECTIE.

Teneinde de vervorming in de rechthoekige platkaart nabij de uiterste parallellen te verminderen, is in de 14e eeuw een projectiemethode bedacht, waarbij de parallellen rechte evenwijdige lijnen zijn, de uiterste parallellen en de middenmeridiaan equidistant worden afgebeeld en de overige meridianen rechte convergeerende lijnen zijn. Het net krijgt daardoor een trapeziumvormige gedaante. De formules voor de misvorming worden op de navolgende wijze afgeleid. Stel de middelbreedte φ_0, de breedten der uiterste equidistante parallellen φ_1 en φ_2 en de afmeting van 1″ van den eveneens equidistant afgebeelden middenmeridiaan gelijk m. Stel verder de afmeting van 1″ van de parallel op de breedte φ_1 gelijk p_1, van 1″ van de parallel op de breedte φ_2 gelijk p_2.



Zij in bovenstaande figuur DE een willekeurige meridiaan en het lengteverschil met den middenmeridiaan l''. Zij CF een willekeurige parallel op de breedte φ en door H en K de parallellen $\varphi + 0''.5$ en $\varphi - 0''.5$ getrokken. Laat uit H een loodlijn neer op de parallel door K, dan is in het rechthoekige driehoekje HKI de hoek $H = \vartheta$ en $tg\,\vartheta = \frac{DG}{GE} = \frac{l\,(p_2 - p_1)}{\varphi_1 - \varphi_2}$

$$h = \frac{\text{kaartmeridiaan}}{\text{bolmeridiaan}} = \frac{HK}{HI} = sec\,\vartheta = \sqrt{\left\{1 + \frac{l^2\,(p_2 - p_1)^2}{(\varphi_1 - \varphi_2)^2}\right\}}.$$

Het gedeelte LF van de parallel φ, begrepen tusschen den middenmeridiaan en den meridiaan op een lengte $l + 0.''5$, is gelijk $AM - NM = (l + 0.5)\, p_1 - (\varphi - \varphi_2)\, tg\, \theta_1$, waarin θ_1 de hoek voorstelt gevormd door genoemde meridianen.

Evenzoo is het gedeelte van de parallel φ, begrepen tusschen den middenmeridiaan en den meridiaan op een lengte $l - 0''.5$ gelijk $(l - 0''.5)\, p_2 - (\varphi - \varphi_2)\, tg\, \theta_2$. Het verschil dier beide gedeelten, zijnde $1''$ van de kaartparallel op de breedte φ en de lengte l, is gelijk $p_2 - (\varphi - \varphi_2)\, (tg\, \theta_1 - tg\, \theta_2)$.

Met behulp der gevonden waarde voor $tg\, \theta$ kan deze waarde herleid worden tot $p_2 - (\varphi - \varphi_2)\, \dfrac{p_2 - p_1}{\varphi_1 - \varphi_2}$.

Zij p de lengte van $1''$ van den parallel op de breedte φ, dan is:

$$k = \frac{\text{kaartparallel}}{\text{bolparallel}} = \frac{p_2 - (\varphi - \varphi_2)\dfrac{p_2 - p_1}{\varphi_1 - \varphi_2}}{p} = \frac{p_2\,(\varphi_1 - \varphi) + p_1\,(\varphi - \varphi_2)}{p\,(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

h, k en θ bekend zijnde, kunnen de elementen van vervorming a, b en $2\,\omega$ berekend worden. De groote en kleine assen der ellips vallen bij deze projectie niet langs de meridianen en parallellen, aangezien de lijnen van het net elkander niet onder rechte hoeken snijden. De uitkomsten der berekening zullen later voor zoover noodig gegeven worden.

Verder kunnen tot de conventioneele cylinderprojecties alle projecties gerekend worden, waarbij de parallelcirkels als evenwijdige rechte lijnen afgebeeld worden en de meridianen als kromme lijnen, die in de polen convergeeren. Onder de gewijzigde cylinderprojecties komen geen conforme, wel zeer veel equivalente voor. Van de laatsten wordt genoemd die van Mercator-Sanson-Flamsteed. Bij deze projectie worden de equator en de middenmeridiaan equidistant door rechte lijnen afgebeeld en evenzoo de parallellen, welke evenwijdig aan den equator worden getrokken. De punten van gelijke lengte worden door krommen verbonden, welke de meridianen voorstellen. Daar bij deze projectie de meridianen sinusoïden vormen, wordt zij ook wel de sinoïdale projectie genoemd. Naast de projectie van Bonne is zij zeer veel voor landkaarten gebezigd. Even als die van Bonne kenmerkt zij zich door groote hoekmisvorming.

HOOFDSTUK IV.

BESCHOUWING VAN DE PROJECTIE-METHODEN IN GEBRUIK BIJ DE ZEEKAARTEN, IN HET BIJZONDER DE NEDERLANDSCHE EN BIJ DE WERKBLADEN VOOR NEDERLANDSCHE HYDROGRAPHISCHE OPNEMINGEN.

Van de hoofdeigenschappen, welke een kaart kan bezitten, wordt voor landkaarten het meeste gewicht gehecht aan oppervlakgelijkheid. Voor zeekaarten heeft deze eigenschap een zeer ondergeschikte beteekenis, aangezien deze kaarten uitsluitend tot doel hebben het den zeeman mogelijk te maken zijn bestemming te bereiken. Hiervoor moet in de eerste plaats

aan hoekgelijkheid en daarna aan lengtegelijkheid de voorkeur worden geschonken, zij het ook dat deze eigenschappen — zooals op blz. 10 gezien is — slechts een beperkte beteekenis hebben. Bij kaarten op groote schaal zal noch de daardoor veroorzaakte, niet absolute juistheid der aangegeven schaal, noch de niet volkomen afbeelding van hoeken merkbaar zijn, omdat het weergegeven gedeelte der aarde daarvoor te klein is. Bij kaarten op kleine schaal zal dit evenmin het geval zijn, wanneer slechts een betrekkelijk klein gedeelte der kaart bij de navigatie in onderling verband gebruikt wordt, zooals het geval is bij plaatsbepaling door hoekmeting of peiling, koers afzetten en afstand afpassen over kleine trajecten. Wordt een grooter gedeelte der kaart in onderling verband gebracht, zooals voorkomt bij het afzetten van een zeer lange koerslijn, dan wordt de werkelijkheid onvolkomen door de kaart weergegeven. Dit is echter onvermijdelijk, voor zoover minder juiste afbeelding van hoeken op conforme kaarten aangaat echter alleen, indien de hoeken worden verkregen door rechte lijnen tusschen de betrokken punten te trekken (blz. 10). Hoewel dus de beperkte beteekenis der beide gewenschte hoofdeigenschappen wel aanvaard moet worden, kunnen de afwijkingen, welke het kaartbeeld dienvolgens van de werkelijkheid moet vertoonen, bij het gebruik eener bepaalde projectie worden uitgeschakeld.

Naast hoek- en afstandgelijkheid, zijn voor zeekaarten nog enkele andere eigenschappen van belang. In de eerste plaats die, dat de loxodroom, dat wil zeggen de weg die een schip onder een vasten koers op aarde volgt, door een rechte lijn in de kaart wordt voorgesteld, hetgeen maakt dat het kaartpassen op eenvoudige wijze kan geschieden. Voor bijzondere gevallen is het gewenscht, dat de grootcirkel of orthodroom door een rechte lijn in de kaart wordt voorgesteld. Voornamelijk omdat deze cirkel door den zeeman gevolgd wordt, als hij groote afstanden moet afleggen en de omstandigheden veroorloven dit langs den kortsten weg te doen. Voorts ook omdat deze eigenschap het afzetten van peilingen verkregen door draadlooze telegrafie zeer gemakkelijk maakt. Als een bijkomende wenschelijkheid moet genoemd worden, dat de hemelstreken over de geheele kaart dezelfde richting houden, althans niet zoo sterk van richting veranderen, dat dit bezwaar kan opleveren bij het afzetten van peilingen en koersen.

Geen enkele projectie-methode vereenigt echter al deze eigenschappen. De orthodroom wordt slechts door de gnomonische projectie als een rechte lijn gegeven, welke projectie overigens aan geen der gewenschte eigenschappen voldoet. Uit dien hoofde worden voor het grootcirkelvaren en het afzetten van draadlooze peilingen speciale kaarten in deze projectie vervaardigd, welke uitsluitend voor genoemde doeleinden dienen.

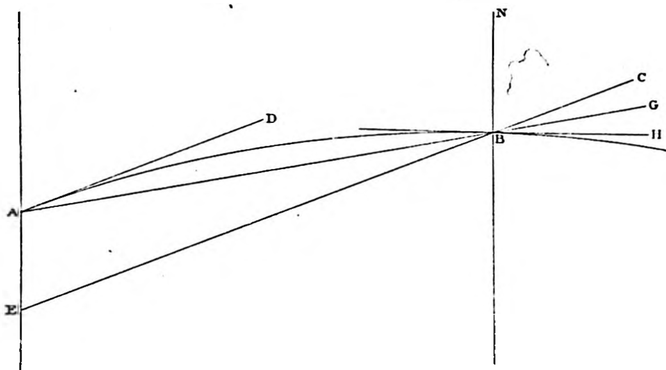
Aangezien de projectie niet conform is, zullen de grootcirkels, dus ook een dergelijke cirkel en een meridiaan, elkander in de kaart niet onder denzelfden hoek snijden als op aarde. Dit leidt er toe de kaarten, in het bijzonder die voor het afzetten van draadlooze peilingen ontworpen, te beperken tot de afbeelding van een niet te groot gedeelte der aarde. Wordt als eisch gesteld, dat de hoekvervorming beperkt blijft tot één graad, dan is in de formule: $\sin \omega = tg^2 \, {}^1/_2 \, \delta$ (blz. 22) $\omega = 0^\circ \, 30'$, waaruit voor δ volgt een waarde van 10′ 40′ of 640 zm.

De Engelsche kaarten voor dit stelsel vervaardigd, strekken dan ook niet verder dan ongeveer dien afstand van het centrale punt.

Aan de eischen van hoekgelijkheid en afbeelding van den loxodroom door een rechte lijn voldoet uitsluitend de cylindrische projectie van MERCATOR. Equidistant is deze projectie echter slechts om en bij den equator of de snijparallel en hoe verder daar vandaan, des te meer wordt een aardsche afstand vergroot voorgesteld. Zooals reeds op bladz. 39 werd aangegeven, kan hieraan te gemoet gekomen worden door gebruik te maken van de veranderlijke schaal voor de breedte, voorkomende in de randverdeeling der zeekaarten, waarbij deze projectie is toegepast.

De beperkte beteekenis der hoekgelijkheid blijkt, indien men op de wassende kaart de loxodroom tusschen twee ver verwijderde punten trekt. Volgens de kaart zal een schip zijne bestemming langs die koerslijn volgens den kortsten afstand bereiken en tijdens de vaart steeds daarop aanleggen; in werkelijkheid zal deze afstand niet het kortste zijn en het doel tijdens de vaart niet recht vooruit zijn. Aangezien de loxodroom echter om praktische redenen toch gevolgd wordt, levert in dit opzicht de beperkte hoekgelijkheid geen bezwaar op.

Rekening moet er echter mede gehouden worden bij het afzetten van peilingen van aardsche voorwerpen op zeer groote afstanden, zooals die met behulp van draadlooze telegrafie verkregen. Mag men voor korte afstanden aannemen, dat de rechte lijn in de wassende kaart getrokken samenvalt met den grootcirkel, gaande door het peilpunt en den waarnemer; voor groote afstanden is dit niet toelaatbaar. In de onderstaande figuur is dit voorgesteld. Daarin is *A* de standplaats, *B* het gepeilde punt, de kromme *AB* de afbeelding van den grootcirkel door beiden gaande.



Wordt in *B* de gepeilde richting *AD* afgezet en de peilingslijn verlengt, dan gaat deze niet door de standplaats, doch snijdt den meridiaan van den waarnemer in *E*. Om de peilingslijn door *A* te doen gaan, moet de richting *GB* worden afgezet, welke het hoekje *CBG* met de gepeilde

richting verschilt. Bekendheid met de grootte van dit hoekje stelt in staat de beperktheid van het begrip hoekgelijkheid bij het praktisch gebruik der wassende kaart in dit opzicht te ontgaan. De richting AB zou men de gemiddelde mercatorpeiling kunnen noemen, in navolging der Engelsche benaming „mean mercatorial bearing".

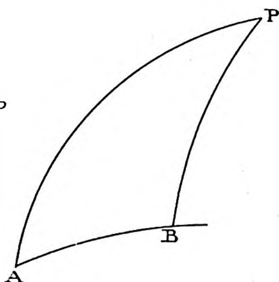
Het verschil in richting van den grootcirkel in A en B, weergegeven door den hoek CBH, is een gevolg van de convergentie der meridianen en bij benadering gelijk aan deze. Derhalve wordt ook deze hoek de convergentie genoemd. Hij wordt aangeduid door a. Indien de afbeelding van den grootcirkel als een cirkelboog wordt beschouwd, is $\angle CBG = \frac{1}{2} \angle CBH = \frac{1}{2} a$. Op de volgende wijze kan voor $\frac{1}{2} a$ een voor de praktijk voldoende nauwkeurige waarde worden afgeleid.

In den pooldriehoek PAB is $\angle B = 180° - A - a$. Zij b_1 de breedte van A en b die van B, dan is:

$$tg \tfrac{1}{2}(A + B) = \frac{\cos \frac{1}{2}(PA - PB)}{\cos \frac{1}{2}(PA + PB)} \cot \tfrac{1}{2} P$$

$$\cot \tfrac{1}{2} a = \frac{\cos \frac{1}{2}(b - b_1)}{\sin \frac{1}{2}(b + b_1)} \cot \tfrac{1}{2} P$$

$$tg \tfrac{1}{2} a = \sin \tfrac{1}{2}(b + b_1) \sec \tfrac{1}{2}(b - b_1)\, tg \tfrac{1}{2} P$$



Daar $\frac{1}{2} a$, $\frac{1}{2} P$ en $\frac{1}{2}(b - b_1)$ betrekkelijk klein zijn, mag voor de formule geschreven worden: $\frac{1}{2} a = \frac{1}{2} \Delta L \sin b_m$, waarin ΔL het lengteverschil en b_m de middelbreedte. Lengteverschil en middelbreedte worden volgens gegist bestek of afzetten der loxodromische peilingen met voldoende nauwkeurigheid afgeleid.

Indien de peiling van 0° tot 360° wordt gerekend, volgt het teeken waarmede $\frac{1}{2} a$ moet worden toegepast op de peiling uit de regels:

Noorderbreedte:

Peiling aan boord genomen:	Schip beW peilpunt:	teeken	+
	beO		—
Peiling opgegeven door kuststation:	Schip beW station:	teeken	—
	beO		+

Zuiderbreedte. Voor elk geval tegenovergesteld teeken.

Wanneer schip en peilpunt aan verschillende kanten van den equator liggen, kan de halve convergentie verwaarloosd worden.

Op de bovenaangegeven wijzen zijn de gebreken der projectie voor het beoogde doel praktisch uitgeschakeld, zoodat zij — althans tot niet te hooge breedte — de meest aangewezene is voor de vervaardiging van zeekaarten en daar dan ook een zeer uitgebreide toepassing bij vindt.

Alle cylindrische projecties — doch ook uitsluitend deze — voldoen geheel aan de bovengenoemde wenschelijkheid van het constant blijven der richtingen van hemelstreken. Ook uit dien hoofde is dus de Mercator-projectie doelmatig.

Van de Mercator-projectie behoeft uit den aard der zaak geen gebruik gemaakt te worden bij de afbeelding van een gedeelte der aarde, dat nog als

plat beschouwd mag worden, dus voor plan- en detailkaarten. *) Doch ook al wordt aan deze voorwaarde niet meer voldaan, kan met een eenvoudige projectie volstaan worden, zoolang geen voor de praktische zeevaart storende hoek- en lengtevervormingen optreden en ook aan de overige bovengenoemde eischen in genoegzame mate tegemoet gekomen wordt. De eenvoudigste projectie, waarmede dit voor niet te groote gedeelten der aarde bereikt wordt, vooral wanneer deze nabij den equator gelegen zijn, is de equidistante cylinder-projectie met equidistante middenparallel en equidistante meridianen, van oudsher gebruikt voor de rechthoekige platkaart. Deze kaarten hebben rechte evenwijdige parallellen en meridianen, terwijl loxodromen, alsmede orthodromen van geringe lengte, in de practijk der zeevaart door rechte lijnen mogen worden afgebeeld. De projectie is wel is waar niet conform en ook niet over het geheele oppervlak equidistant, maar als het afgebeelde gebied slechts niet te groot is, zijn de daardoor veroorzaakte vervormingen evenmin storend als die in de afbeelding van genoemde lijnen. Tegenover de wassende kaart heeft de rechthoekige platkaart de voordeelen van grooter eenvoud van constructie en toelaatbaarheid van gebruik eener vaste schaal. Het is dus veroorloofd de eenvoudiger projectie te gebruiken, totdat de vervormingen daaraan verbonden van invloed kunnen worden op de praktische zeevaart, om daarna over te gaan tot de conforme cylindrische projectie.

Ook de internationale hydrographische conferentie van 1919 te Londen huldigde deze gedragslijn door de navolgende besluiten aan te nemen:

I. It is agreed that the Mercator projection should be generally used for all charts on scales smaller than 1 : 50.000.

II. It is agreed that the line of demarcation between the use of the Mercator and the Gnomonic or other projections should be the scale of approximately 1 : 50.000.

Het woord „generally" is op voorstel van de Nederlandsche afgevaardigden in het eerste besluit opgenomen. Zij betoogden dat de begrenzende schaal voor streken nabij den equator veel te nauw bemeten was. Dat dit alleszins juist is, blijkt indien men de tabel van vervormingen voor de Mercator-projectie, voorkomende op bladz. 39, vergelijkt met die voor de rechthoekige platkaart, welke gegeven is op bladz. 48.

Met behulp van de eerder gevonden formules is na te gaan, waar de grens voor het gebruik van beide projecties ligt. Zooals bij de algemeene behandeling dier projecties gebleken is, hangt de grens uitsluitend af van de breedte-uitgestrektheid, waarover de kaart strekt en is de lengte-uitgebreidheid van geen invloed.

Voor de Nederlandsche zeekaarten werd tot 1923 uitsluitend de equidistante cylinder-projectie toegepast. Hieronder zal worden nagegaan in hoeverre dit toelaatbaar mocht worden geacht.

Voor de zeekaarten van Nederland kan bij dit onderzoek worden volstaan met de berekening der elementen van vervorming om de 10′ tusschen 51° en 54° breedte, voor een middelbreedte van 52° 30′.

---

*) Om een denkbeeld te geven tot hoever men hiermede gaan kan, zij medegedeeld dat indien een gedeelte van het aardoppervlak met een straal van 15 zm. als plat beschouwd wordt, de hoekvervorming, volgens de formules gevonden bij de orthographische projectie (blz. 20) 2″ bedraagt; de lengte- en oppervlakmisvorming 0.01 ‰.

Aangenomen wordt, dat de uitkomsten tusschen genoemde grenzen voor andere middelbreedten zoo weinig met de berekende verschillen, dat de gevolgtrekkingen dezelfde zouden zijn als die op onderstaande tabel gebaseerd.

Breedte verschil / Elementen van vervorming	1° 30′ 54° N.	1° 20′	1° 10′	1° 0′	50′	40′	30′	20′	10′
2 ω	2° 1′	1° 47′	1° 33′	1° 20′	1° 6′	0° 53′	0° 39′	0° 26′	0° 13′
a	1.036	1.032	1.028	1.023	1.019	1.016	1.012	1.008	1.004
b	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
S	1.036	1.032	1.028	1.023	1.019	1.016	1.012	1.008	1.004

m.b. 52° 30′	10′	20′	30′	40′	50′	1° 0′	1° 10′	1° 20′	1° 30′ 51° N.
0° 0′	0° 13′	0° 26′	0° 39′	0° 52′	1° 4′	1° 17′	1° 29′	1° 42′	1° 54′
1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1.000	0.996	0.993	0.989	0.985	0.982	0.978	0.974	0.971	0.967
1.000	0.996	0.993	0.989	0.985	0.982	0.978	0.974	0.971	0.967

Voor de Mercatorprojectie behoeft geen tabel berekend te worden, immers hoekvervorming treedt daarbij niet op en de lengtevervorming wordt ondervangen door de veranderlijke schaal.

Worden de detailkaarten der Nederlandsche zeegaten aan de hand der tabel op hunne vervormingen getoetst, dan blijken N°. 201 „Zeegaten van Texel en Eierlandsche gronden" en 207 „Monden van de Eems", beide op een schaal van 1 : 50.000, welke strekken over het grootste breedteverschil, namelijk 24′, nabij de N. en Z.randen een hoekvervorming van 15′5 te hebben, gepaard aan een lengtevervorming van 0.5 °/₀, welke vervormingen naar het midden toe afnemen en op de middelbreedte nul zijn; voor n°. 225 „Vaarwaters naar de Zuiderzee" (1 : 50.000) is de grootste hoekvervorming 13′, de grootste lengtevervorming 0.4 °/₀; voor n°. 202 „Zeegaten aan den Hoek van Holland en van Goeree", 204 „Zeegaten van Brouwershaven en Zieriksee" en 205 „Zeegaten van Vlieland, Terschelling en Ameland", alle op 1 : 50.000, bedragen deze waarden 12′ en 0.3 °/₀; terwijl de vervormingen voor de overige kaarten nog kleiner zijn.

Deze vervormingen zijn voor het praktisch gebruik niet van overwegend belang. Voor de detailkaarten der Nederlandsche zeegaten mocht dus met behoud van voldoende nauwkeurigheid de equidistante rechthoekige projectie gebruikt worden.

Voor de kaarten op kleiner schaal is het eenigszins anders gesteld. Afgezien van n°. 212, de „Zuiderzee" op 1 : 100.000, waarbij een grootste hoekvervorming van 36′ optreedt, gepaard aan een grootste lengtevervorming van 1 °/₀, doch welke kaart door de aanneming van het wetsontwerp betreffende de gedeeltelijke droogmaking en de afsluiting der Zuiderzee slechts nog een betrekkelijk kort bestaan zal hebben; zijn de

kustkaarten onderhevig aan vrij groote vervormingen. Voor n°. 226 „IJmuiden tot Eems" en 227 „Noordhinder tot Kijkduin" beide op een schaal van 1 : 250.000, bedragen de grootste hoekvervormingen respectievelijk 1° 3′ en 1° 21′, naast lengtevervormingen tot 2 %; voor n°. 208, de „Nederlandsche kust" op 1 : 500.000, *) bedraagt de grootste hoekvervorming 2°, naast een grootste lengtevervorming van 4 %. Alhoewel ook voor deze kaarten geldt, dat naar de middenparallel de vervormingen tot nul afnemen, zijn deze vervormingen van een grootte, dat gebruik van de rechthoekige platte projectie voor deze kaarten veroordeeld moet worden.

Met betrekking tot de Oost-Indische zeekaarten zal eerst worden nagegaan of de equidistante cylinderprojectie voor n°s. 2 en 3, „Oost-Indische Archipel" West en Oostblad, beide op de schaal 1 : 3 000 000, toelaatbaar is. Deze kaarten strekken van 8° N.b. tot 12° Z.b.

In onderstaande tabel zijn de elementen van vervorming voor deze breedtegrenzen bij gebruik der equidistante projectie opgegeven.

Breedte / Elementen van vervorming.	8° N.	2° N.	0°	2° Z. m.b.	8° Z.	12° Z.
2 ω	6′ 20″	0′ 0″	0′ 25″	0′ 0″	6′ 20″	14′ 52″
a	1 000	1 000	0.999	1 000	1 000	1 000
b	1 009	1 000	1 000	1 000	1 009	1 022
S	1 009	1 000	0.999	1 000	1 009	1 022

Uit deze tabel blijkt dat voor de onderwerpelijke kaarten de projectie met voldoende vertrouwen mag worden gebezigd.

Alhoewel uit deze tabel tevens kan worden afgeleid, dat voor alle andere Indische kaarten de equidistante cylindrische projectie met nog meer vertrouwen gebruikt mag worden, zijn ten overvloede de elementen van vervorming gegeven voor een kaart van de grootste hoogte, welke door een zeekaart op 1 : 1.000.000 van den archipel bereikt zou worden, onderstellende dat de Zuidgrens van een dergelijke kaart ligt op de Zuidelijkste parallel, waartoe de zeekaarten van den archipel strekken. Hierbij is dus het ongunstigste geval aangenomen. Een dergelijke kaart zou loopen van 4° Z.b. tot 12° Z.b.

Breedte / elementen van vervorming.	4° Z.b.	8° Z.b. (m.b.)	12° Z.b.
2 ω	5′ 5″	0′ 0″	8′ 36″
a	1 000	1 000	1 012
b	0 993	1 000	1 000
S	0 993	1 000	1 012

*) Deze kaart is tijdens het afdrukken van deze studie vervallen.

Volledigheidshalve dient nog te worden onderzocht, welke vervormingen de projectie ten gevolge heeft voor de West Indische zeekaarten. Volgens de formules bedragen de grootste waarden van 2 ω voor n°. 217, „Kust van Guyana van de Essequebo-rivier tot Cayenne", schaal 1 : 750.000 (loopende van 4° 45′ tot 9° 30′ N.b.) 2′ 58″ tot 4′ 14″ en zijn de grootste lengtevervormingen 0.4 en 0.6 %; voor n°. 223, „Curaçao, Bonaire en Aruba" schaal 1 : 300.000 (loopende van 11° 8′ tot 12° 50 N.b.) bedraagt de grootste waarde van 2 ω 2′ 18″ bij een grootste lengtevervorming van 0.3 %; voor n°. 210, „St. Martin, Saba, St. Eustatius en omliggende eilanden", schaal 1:250.000 (loopende van 16° 55′ tot 18° 39′ N.b.) zijn deze waarden 3′37″ en 0.5 %. Ook voor deze kaarten is dus de projectie toelaatbaar, zoodat tegen haar algemeen gebruik door den Nederlandschen hydrographischen dienst slechts ten opzichte van de kustkaarten van Nederland (n°. 226, 227 en 208) bezwaar bestaat. Overigens mag de keuze van projectie voldoende doelmatig worden genoemd, aangezien tegenover hare onbetwistbare voordeelen, als eenvoud, vaste schaal, rechtlijnig evenwijdig en onder rechte hoeken snijdend net, slechts vervormingen voorkomen, die voor de praktijk van ondergeschikt belang zijn.

Voor de werkbladen staat de zaak eenigszins anders, aangezien voor de constructie grootere eischen aan een projectie moeten gesteld worden dan voor het kaartpassen. De hoek- en lengtevervormingen moeten op die bladen binnen belangrijk kleinere grenzen beperkt blijven, bovendien moeten aangrenzende bladen zonder van belang zijnde verschillen aan elkander kunnen gepast worden.

Snij- of peilingslijnen zijn rechte lijnen tusschen twee aardsche voorwerpen en dus koorden van grootcirkelbogen. Dergelijke lijnen dienen uit hoofde van eenvoudige constructie in de projectie eveneens recht te zijn, dan wel zoo weinig van rechte lijnen af te wijken, dat het verschil verwaarloosd mag worden.

Voor een werkblad doet het er weinig toe of de hemelstreken over het geheele blad dezelfde richting houden, alhoewel dit bij de constructie eenig gemak geeft. Evenmin is een vaste schaal een vereischte, hoewel ook dit tot vereenvoudiging bij de constructie leidt.

Verder behoeft geen groote mate van juistheid geëischt te worden bij de voorstelling van loxodromen door rechte lijnen, aangezien van loxodromen bij de opneming slechts zeer korte stukken gebruikt worden.

De keuze van projectie wordt dus — afgezien van eenvoudigheid van constructie van het net — beheerscht door de maten waarin voldaan wordt aan de eischen van conformiteit, equidistantie en het weergeven van groote cirkels door rechte lijnen. Aangezien die eigenschappen onvereenigbaar zijn, moet wel een bemiddelende keuze worden gedaan. Het spreekt vanzelf dat zoolang de equidistante cylinderprojectie slechts kleine aanneembare vervormingen geeft, deze projectie gekozen wordt.

Bij de opnemingen in Nederland werden in den regel voor constructiebladen afgesneden vellen papier van een formaat 68 × 100 c.M. gebruikt en de gebezigde schaal is zelden kleiner dan 1 : 50.000. Op een dergelijk blad komen hoogstens 16 breedteminuten voor. Berekenen wij over die afmeting de elementen van vervorming om de twee minuten bij een

middelbreedte van 52° 30′, kortheidshalve voor slechts een helft van het blad en wel die daarvoor de vervorming het grootst is, dan worden de navolgende uitkomsten verkregen.

Breedte / elementen van vervorming	m.b. 52° 30′	32′	34′	36′	38′
$2\,\omega$	0′ 0″	2′ 36″	5′ 13″	8′ 2″	10′ 27″
a	1.000	1.00076	1.0015	1.0023	1.003
b	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
S	1.000	1.00076	1.0015	1.0023	1.003

Uit deze tabel blijkt dat met het oog op de hoekvervorming de projectie voor een nauwkeurige constructie minder geschikt is. Uit dien hoofde is men vroeger overgegaan tot de gewijzigde equidistante cylinderprojectie (zie bladz. 41). Bij de berekening der elementen van vervorming voor deze projectie dient ook rekening gehouden te worden met het aantal lengteminuten van het blad, omdat de uitbreiding in lengte in de formules voor h, k en θ voorkomt. Nu zullen op een blad papier van bovengenoemde afmetingen hoogstens 40 lengteminuten voorkomen. Beschouwen wij slechts een $\frac{\text{linker}}{\text{rechter}}$ helft van het net dan vinden wij:

	Midden-meri-diaan.	Meri-diaan van 2′	4′	6′	8′	10′	12′	14′	16′	18′	20′
θ	0′ 0″	1′ 35″	3′ 10″	4′ 46″	6′ 21″	7′ 56″	9′ 31″	11′ 7″	12′ 42″	14′ 17″	15′ 52″

Voor h op den meridiaan van 20′ wordt 1.00001 gevonden; k is gelijk 1 voor de uiterste parallellen, verminderende tot 0.9999973 voor de middenparallel. De grootste vervorming heeft dus plaats aan de uiteinden van de middenparallel, alwaar $2\,\omega$ gelijk is aan θ, $a = 1.0023$, $b = 0.9977$. Vandaar vermindert de vervorming voornamelijk naar binnen, maar ook iets naar boven en onder. Deze projectie blijkt dus wel andere vervormingen te geven, doch geen kleinere dan de equidistante cylindrische en moet dus eveneens minder toelaatbaar worden geoordeeld.

Voor de opnemingen in Indië kan echter de equidistante cylindrische projectie met vertrouwen worden gebezigd. De bladen zullen daar nooit hooger dan 1 M. worden genomen en dus, op een schaal van 1 : 100.000 (de kleinste schaal waarop behoudens een enkele uitzondering gewerkt wordt) niet meer dan 50 breedteminuten omvatten. Berekenen wij de elementen van vervorming voor de zône buiten de parallellen waarin de cylinder den bol snijdt, dat is dus voor de ongunstigste helft van het

blad, en voor een middelbreedte van 9°, welke slechts voor opnemingen van Soemba en het Zuidelijk gedeelte van Timor, met inbegrip der Rotti- en Savoegroep, overschreden wordt, dan wordt gevonden:

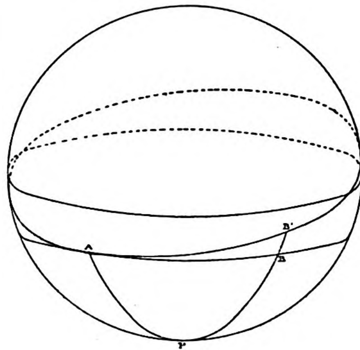
Breedte	$2\ \omega$	a	b
9° 0′	0′ 0″	1.000	1.000
9 10	1 36	1.0005	1.000
9 20	3 34	1.0009	1.000
9 25	4 3	1.0012	1.000

Voor kleinere middelbreedten zijn de maximumvervormingen in de onderstaande tabel vereenigd.

Middel-breedte.	$2\,\omega$	a	b	S
8°	3′ 37″	1.0011	1.000	1.0011
6	2 47	1.0008	1.000	1.0008
4	1 56	1.00054	1.000	1.00054
2	0 57	1.00028	1.000	1.00028
0	0 5	1.000026	1.000	1.000026

Verder moet nog onderzocht worden in hoeverre aan den eisch voldaan wordt, dat snijlijnen (koorden van grootcirkelbogen) met voldoende nauwkeurigheid door rechte lijnen op het constructieblad worden weergegeven.

De afwijking tusschen de rechte lijn, welke twee punten op het constructieblad verbindt, en de afbeelding van den grooten cirkel door die punten zal het grootste zijn, wanneer die punten op een zelfde parallel liggen.



Stel dat uit een punt op 9°25′ Z.B. een voorwerp recht Oost gepeild is, dan wordt de richting op het blad afgezet door de (rechte) parallel te trekken, terwijl het voorwerp in werkelijkheid ligt op den grootcirkel, die de parallel in de standplaats raakt. De afwijkingen tusschen beide lijnen kunnen berekend worden uit den rechthoekigen driehoek PAB', waarin A het standpunt, B' het voorwerp, hoek P het lengteverschil tusschen beiden en PA het complement van de breedte is.

In dien driehoek is $tg\ PA = tg\ PB' \cos P$ of $tg\ PB' = tg\ 80°35' \sec \Delta l$.

Voor Δl achtereenvolgens aannemende 10′, 20′ enz. tot 60′ wordt voor PB' gevonden: 80°35′0″,15; 0″.54; 1″.3; 2″.2; 3″.5 en 5″.0.

Voor de breedte-secunde 30 M. stellende, beteekent dit dat bij een afstand van 10, 20 enz. tot 60 zm. de plaats van het voorwerp in werkelijkheid 4.5, 16, 39, 66, 106 en 150 M. benoorden de parallel zal liggen.

Deze uitkomsten geven de grootste afwijkingen aan, welke in den archipel, behoudens op Soemba en de Z.lijkste helft van Timor, zullen voorkomen. Op grond daarvan mag aangenomen worden dat, werkende op een schaal van 1 : 100.000, tot op afstanden van 20 à 25 zm. in elk geval de voorstelling van de snijlijn door een rechte voldoende nauwkeurig is en dat deze afstanden grooter mogen zijn, naarmate de richting meer nabij die van den meridiaan valt of de breedte van de standplaats kleiner is.

Bij gebruik van de equidistante cylinderprojectie voor werkbladen van de hydrographische opneming in Nederlandsch-Indië is dus een grootste hoekvervorming van 4′ te verwachten, gepaard aan een grootste lengtevervorming van 1 $^0/_{00}$, terwijl het weergeven van snijlijnen door rechte lijnen op die bladen voldoende nauwkeurig is op lagere breedten en voor niet te groote afstanden in O.-Wlijke richtingen op hoogere breedten.

De projectie beantwoordt dus in voldoende mate aan de eischen, welke voor de hydrographische opneming van Indië gesteld moeten worden. De uitkomsten van het onderzoek naar de afwijkingen der rechte lijn ten opzichte van den grootcirkel doen wel vermoeden, dat ook uit dien hoofde de equidistante cylindrische projectie voor werkbladen bij de opneming in Nederland zou moeten worden afgekeurd. Hierbij moet echter in het oog worden gehouden, dat bij deze opneming het gebruik van snijlijnen op groote afstanden zeer zelden voorkomt.

De vraag zou kunnen worden gedaan, waarom voor de werkbladen zooveel hooger eischen gesteld moeten worden dan voor de kaart, wanneer bij de overbrenging van het minuutblad op de netkaart de teekening toch vervormd wordt. Men bedenke echter dat de hoeken, tusschen de richtingen uit een plaats op aarde naar verschillende punten getrokken, niet in gelijke mate bij de afbeelding door de projectie vervormd worden. Om de waarnemingsplaats in het constructieblad nauwkeurig met behulp der gemeten hoeken te vinden, zou op elk dier hoeken het bedrag der vervorming moeten toegepast worden, hetgeen niet doenlijk is. Men zet de werkelijk gemeten hoeken af en er ontstaat dus een fout in de ligging der bepaalde plaats. Wordt een volgende snellius gemeten op andere meetpunten, dan ontstaat eveneens een fout. Het resultaat is dus een ongelijkmatige vervorming der geconstrueerde teekening, welke bij bedragen van 2ω tot 16′ grooter zal zijn dan die, tengevolge van onvermijdelijke fouten aan de constructie verbonden.

De minuutbladen worden in den regel uitgevoerd in equidistante cylinderprojectie en hebben niet steeds dezelfde grenzen als het constructieblad, waarvan een gedeelte der opneming op het minuutblad wordt

overgebracht. Is nu bijv. een gedeelte eener opneming geconstrueerd nabij het linkereinde van de middenparallel van een constructie-blad in gewijzigde cylinderprojectie en wordt dit gedeelte overgebracht op den onderkant van een minuutblad, dan wordt het daarbij — zooals aangetoond is — in een geheel anderen zin vervormd. Deze tweede vervorming heeft echter — in tegenstelling met de eerste — een gelijkmatig karakter.

Voor de netkaart worden meestal verschillende minuutbladen gebruikt en het kan dus gebeuren dat het beschouwde gedeelte vervolgens wordt overgebracht op den bovenkant der netkaart. Daaruit spruit een derde vervorming voort, welke in tegengestelde zin geschiedt als de tweede (uitrekking in plaats van samendrukking). Overigens is ook deze vervorming gelijkmatig. Grenst het beschouwde gedeelte aan een ander, dat tegengestelde vervormingen heeft ondergaan, dus geconstrueerd is nabij het rechtereinde van de middenparallel van een constructieblad en daarna overgebracht is op den bovenkant van een minuutblad, dan is het, lettende op de betrokken elementen van vervorming, duidelijk dat een voorstelling op de netkaart wordt verkregen, die in van belang zijnde mate afwijkt van de juiste. Het is waar dat bij dit betoog een grensgeval is beschouwd, doch dit neemt niet weg dat voldoende blijkt, dat aan de projectie voor de werkbladen hooger eischen moeten worden gesteld dan aan die voor de netkaart. Is de eerste in die mate nauwkeurig, dat de voorstelling op de minuutbladen voldoende juist is, onafhankelijk van het gedeelte van het constructie-blad, waarop het geconstrueerd is en onafhankelijk van het gedeelte van het minuutblad, waarop het is overgebracht, dan zou de gelijkmatige vervorming, welke de voor de netkaart te bezigen equidistante cylindrische projectie meebrengt, aanvaard kunnen worden, mits bij de vaststelling der grenzen van de kaart rekening is gehouden met de grootten dier vervorming.

Bij de constructie van netten in de equidistante cylinderprojectie of in de gewijzigde cylinderprojectie wordt rekening gehouden met de afplatting der aarde, door de te gebruiken afmetingen der meridiaan- en parallelbogen te berekenen met inachtneming der afplatting. Voor de breedten waaronder de Nederlandsche hydrographische dienst werkt, vindt men die afmetingen in de „Tafelen benoodigd bij het hydrographisch opnemen", in 1913 uitgegeven door het Ministerie van Marine. Dit werk is uitverkocht. De daarbij gebruikte afplatting is voor Nederland $\frac{1}{309,65}$, voor Indië $\frac{1}{299.1528}$.

De boven gegeven beschouwingen hebben er toe geleid in 1920 een andere projectie, dan de tot dat jaar gebruikelijke, voor de werkbladen ten dienste van de opnemingen der Nederlandsche zeegaten te kiezen.

Recapituleerende, werden aan de te kiezen projectie de navolgende eischen gesteld, of wel — daar deze niet allen vereenigbaar zijn — werd een zoo goed mogelijk compromis verlangd tusschen:

1°. hoekgelijkheid;
2°. lengtegelijkheid;

3° afbeelding van den grootcirkel door een rechte lijn; waarbij de volgorde het gewicht der eischen weergeeft.

Niet noodig doch gewenscht was, dat de hemelstreken over het geheele blad dezelfde richting houden. Verder is eenvoudigheid van netconstructie wenschelijk.

Voor de kaarten moeten de zelfde eischen gesteld worden, doch daaraan nog worden toegevoegd: afbeelding van een loxodroom door een rechte lijn, terwijl aan de wenschelijkheid van het behoud van richting door de hemelstreken grooter gewicht moet worden gehecht dan voor de werkbladen.

Begonnen werd met een onderzoek van de bij enkele andere natiën in gebruik zijnde projecties voor werkbladen. In Engeland wordt de (scheeve) gnomonische projectie gebruikt (Hydrographical Surveying, Wharton & Field, 1909, bladz. 98) en wel uitsluitend op grond van sub 3. Op bladz. 22 zijn de formules gegeven om voor de azimuthale gnomonische projectie de elementen van vervorming te berekenen. Om de onderwerpelijke projectie te vergelijken met de equidistante cylinder- en de gewijzigde cylinderprojectie, ten opzichte van de breedte van Nederland, zijn $2\,\omega$, a en b voor de gnomonische projectie berekend voor $\delta = 14'$, dat is voor den afstand, welke goedschiks op een constructieblad, van de afmetingen als voor Nederland gebruikt wordt, op een schaal 1 : 50.000 kan geplaatst worden.

Uit de berekening volgt: $2\,\omega = 2''$, $a = 1.000017$, $b = 1.000008$, $S = 1.000025$. Uit de tabel op bladz. 48 bleken voor de equidistante cylinderprojectie op de middelbreedte van Nederland de grootste afwijkingen te zijn: $2\,\omega = 10'\,27''$ $a = 1.003$ $b = 1.000$ $S = 1.003$. Op bladz. 49 werden voor de grootste afwijkingen bij de gewijzigde cylinderprojectie gevonden: $2\,\omega = 15'\,52''$ $a = 1.0023$ $b = 0.9977$ $S = 0.999995$.

Hieruit blijkt dat de gnomonische projectie niet alleen veel nauwkeuriger is dan de bij de opneming in Nederland gebruikte projectie-methoden, doch ook aan alle gestelde eischen zeer voldoende tegemoet komt.

Worden dezelfde waarden berekend voor $\delta = 25'$, dan kan een vergelijk gemaakt worden met de equidistante projectie ten opzichte van het beschouwde blad voor Indië. Alsdan blijkt $2\,\omega = 6''$ te zijn, $a = 1.00005$ en $b = 1.00003$, $S = 1.00008$. Vergelijk met de waarden gegeven op bladz. 51 doet zien, dat de gnomonische projectie het ook voor den Indischen archipel wint van de equidistante cylindrische, hoewel nabij den equator de hoek-, afstands- en oppervlakvervorming voor de laatste projectie kleiner zijn.

De Duitsche hydrographische dienst gebruikt voor opnemingen in streken, waar de geographische coordinaten der triangulatiepunten reeds van te voren bekend zijn, dus voornamelijk in wateren van het Rijk van Europa, de Mercator-projectie (Handbuch für Küstenvermessungen, herausgegeben vom Reichs Marineambt, 1906, bladz. 289). Deze projectie voldoet aan den eersten eisch, aan den tweeden kan tegemoet gekomen worden door een schaal van secanten te construeeren, doch de derde eisch wordt niet vervuld.

Overigens heeft de methode voordeelen bij de opneming van kustgedeelten, welke uitsluitend op netkaarten, uitgevoerd in dezelfde projectie, gekaarteerd worden en zou dus overweging verdienen bij geheele vernieuwing der Nederlandsche kustkaarten (nos. 226, 227 en 208, zie blz. 48).

Voor opnemingen, welke geheel constructief in kaart worden gebracht,

dus waarbij geen triangulatiepunten berekend worden, gebruikt de Duitsche hydrographische dienst de kegelprojectie met equidistante middenparallel en equidistante meridianen (blz. 24). Berekenen wij voor de middelbreedte 52° 30′ en een halve hoogte van het blad van 8′ de elementen van vervorming, dan wordt gevonden: $2\,\omega = \pm\, 1''$, $a = 1.000003$ en $b = 1$, zoodat deze projectie ongeveer gelijke hoekvervorming geeft als de gnomonische, doch kleiner lengtevervorming. Verder staat zij echter bij deze achter, doordat de grootcirkel niet door een rechte lijn wordt weergegeven. Voor het beschouwde blad voor Indië zijn $2\,\omega = 6''$, $a = 1.000026$ en $b = 1$.

Ook deze kegelprojectie wint het dus in nauwkeurigheid van de equidistante en de gewijzigde cylindrische projectie.

Men had nu een van de beide onderzochte projecties kunnen kiezen voor de werkbladen bij de opneming in Nederland, ware het niet dat nog een punt, zij het van anderen aard, in dit onderzoek behoort te worden betrokken. Dit punt betreft het navolgende.

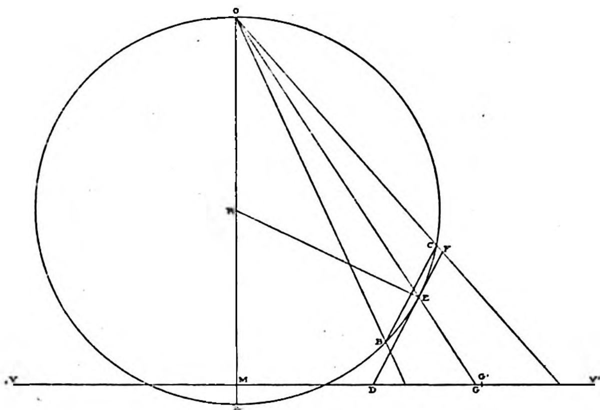
De Rijkscommissie voor Graadmeting en Waterpassing (korte titel Rijksdriehoeksmeting) ingesteld in 1879, is bezig de driehoeksmeting van den generaal Krayenhoff, uitgevoerd in de jaren 1802—1811 en de daarop berustende secundaire en tertiaire metingen, uitgevoerd in 1836—1856, te herzien. Deze commissie geeft de ligging der door haar bepaalde punten in rechthoekige coördinaten uitgedrukt in meters, voor de scheeve stereographische projectie. Het centrale punt dezer projectie is de Lieve Vrouwetoren van Amersfoort en de coordinaten gelden voor een rechthoekig stelsel, liggende in het projectievlak, met het centrale punt als oorsprong. De meridiaan van dit punt wordt in deze projectie afgebeeld als een rechte lijn en de y as valt samen met deze lijn.

Aangezien het te verwachten is, dat in de toekomst de topographische kaarten in deze projectie zullen worden uitgevoerd, terwijl men daarmede met de waterstaatskaarten reeds doende is, en verder een herziening werd voorgenomen van de lijst van triangulatiepunten, gebruikt bij de opnemingen der Nederlandsche zeegaten, welke herziening gebaseerd moest zijn op de uitkomsten der Rijksdriehoeksmeting, was het gewenscht na te gaan of de projectie ook met voordeel door den hydrographischen dienst gebruikt kon worden.

Als oogpunt der projectie is door genoemde Rijkscommissie aangenomen het punt op den bol, dat diametraal tegenover Amersfoort is gelegen. Het projectie-vlak staat loodrecht op de aardmiddellijn, welke door het oogpunt gaat en snijdt het boloppervlak beneden Amersfoort zoodanig, dat binnen de grenzen van het af te beelden gedeelte de vergrooting der kaart zoo weinig mogelijk van de eenheid afwijkt.

Volgens het behandelde op bladz. 19 is de projectie conform, aan den eersten eisch wordt dus geheel voldaan. Wat de lengtevervorming betreft, zij er aan herinnerd dat de meetkundige plaatsen van punten met gelijke vergrooting concentrische cirkels zijn met het centrale punt als middelpunt. De grootte dezer vervormingen worden gegeven in de laatste kolom der tabel, voorkomende in de uitgave der Commissie „Rechthoekige coordinaten, I, 1909”, en daar uitgedrukt in eenheden van de 7de decimaal der logarithme. Wordt Aardenburg aangenomen als

uiterste punt, voor zoover van belang voor de zeekaarten, dan zien wij uit genoemde tabel dat a en b aangroeien van een bedrag van 0.99991 voor Amersfoort tot 1.000077 voor Aardenburg. De lengtevervorming is dus zeer gering en voor de praktijk van geen beteekenis. Ingezien zal worden dat zij kleiner moet zijn dan bij de gnomonische projectie, tengevolge van de verplaatsing van het oogpunt uit het middelpunt der aarde naar het uiteinde van de middellijn. De mate van onjuistheid, welke wordt begaan door een grootcirkel af te beelden door een rechte lijn, is behandeld op de volgende bladzijde.



Een eigenschap der stereographische projectie is, dat alle cirkels op den bol getrokken in de projectie ook door cirkels worden weergegeven. Onderstelt men een willekeurigen cirkel op het boloppervlak getrokken en door het middelpunt van dien cirkel en het oogpunt een groot cirkelvlak gebracht, dan staat dit laatste vlak loodrecht op dat van den beschouwden cirkel, aangezien de lijn die het middelpunt van dezen met dat van den bol verbindt in het vlak van den grootcirkel ligt.

Zij het vlak van teekening dat van den grootcirkel en BC de middellijn van den beschouwden cirkel, doorsnede van dezen met het vlak van teekening. Zij verder VV^1 de doorsnede van het projectie-vlak met dat van teekening. Trek de lijn DEF evenwijdig aan BC en den grootcirkel rakende in E, dan is Δ DEG gelijkbeenig, want $\angle DGE = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle ARE$ en $\angle DEG = \angle OEF = \frac{1}{2} \angle ORE = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle ARE$.

De projectie van den beschouwden cirkel zal gevormd worden door de doorsnede met het projectievlak van het kegeloppervlak, dat ontstaat als uit O lijnen getrokken worden naar alle punten van den bolcirkel. Volgens het bovenstaande wordt dit kegeloppervlak door het vlak van den beschouwden cirkel en door het projectievlak, welke beide loodrecht staan op dat van teekening, gesneden onder hoeken, die elkanders supplement zijn,

waaruit volgt dat de doorsneden der beide eerste vlakken met het kegeloppervlak gelijkvormig moeten zijn. Het middelpunt G' van den projectiecirkel is echter niet de projectie van het middelpunt van den bolcirkel.

Volgens het bovenstaande wordt een grootcirkelboog op aarde door een cirkelboog in de projectie afgebeeld. Wordt in plaats daarvan een rechte lijn getrokken met dezelfde azimuthale richting in het meetpunt als de grootcirkel, gaande naar het aangemeten punt, dan zal een fout worden gemaakt. De maximum grootte van die fout kan worden afgeleid uit de op bladz. 17 van de bovengenoemde uitgave „Rechthoekige coordinaten I" gegeven grootste waarde van 14″ voor den hoek tusschen de raaklijn en de koorde van een grootcirkelboog van 52000 M. lengte. Op dezen afstand zal de als rechte getrokken snijlijn dus op 3.5 M. langs het aangemeten punt gaan, hetgeen in verband met de schaal beschouwd van geen beteekenis is. Ook aan den derden eisch wordt dus voldaan. Wat de op bladz. 54 genoemde wenschelijkheden betreft, moge het navolgende opgemerkt worden.

Geen der beschouwde projecties geeft een constante richting der hemelstreken over het geheele blad, aangezien bij alle het net gevormd wordt door convergeerende meridianen en kromme parallellen. Voor de stereographische projectie bedraagt de convergentie ongeveer 1′ per minuut lengte. Wèl is voor alle drie de lengtevervorming gering genoeg, opdat in de praktijk een vaste schaal kan worden gebruikt.

Wat de eenvoudigheid van netconstructie betreft, deze verschilt onderling weinig. Bij de gnomonische en de kegelprojectie zijn de meridianen rechte lijnen; bij de stereographische cirkelbogen, echter beschreven met een zoo grooten straal, dat ze praktisch over de afmetingen van kaartbladen eveneens recht zijn, zooals nader zal blijken. De parallellen zijn bij de kegelprojectie en de stereographische cirkelbogen; bij de gnomonische kegelsneden. In de praktijk worden zij bij alle drie door gebroken lijnen voorgesteld.

Op grond van het bovenstaande is voor de werkbladen aan de stereographische projectie de voorkeur gegeven, waarbij vooral eenheid met de door de Rijkscommissie voor Nederland aangenomen methode van belang is geacht. Hoewel de cylinderprojectie voor de detailkaarten behouden had kunnen blijven (zie blz. 47), geeft het bij de bewerking gemak indien de kaarten in dezelfde projectie als de werkbladen zijn uitgevoerd. Aangezien daartegen geen ernstige bezwaren bestaan, zooals ten deele reeds gebleken is en overigens verderop blijken zal, terwijl de stereographische projectie het van de cylindrische in juistheid van afbeelding wint, wordt de eerste thans niet alleen gebruikt voor de werkbladen der in gang zijnde nieuwe opneming der zeegaten, doch worden ook de daarnaar vervaardigde kaarten tot een schaal van 1 : 50000 in deze projectie uitgevoerd.

Als een bijkomstig voordeel zal daardoor in de toekomst eenheid in de kaarteering van Nederland verkregen worden (zie blz. 55).

Wat de fout betreft, welke begaan wordt bij de afbeelding van een loxodroom door een rechte lijn, zij verwezen naar blz. 65, terwijl de mate waarin wordt afgeweken van de wenschelijkheid van het behoud

van richting door de hemelstreken op de voorgaande bladzijde is aangegeven.

Worden in de toekomst de kustkaarten nos. 226 en 227 op de schaal 1 : 250 000 vernieuwd, dan zal daarvoor de Mercator-projectie worden gebezigd.

HOOFDSTUK V.

VERDERE BIJZONDERHEDEN OVER DE STEREOGRAPHISCHE PROJECTIE EN ENKELE NADERE MEDEDEELINGEN OVER DE POLYEDER PROJECTIE.

Thans zal nog een en ander van de scheeve stereographische projectie worden medegedeeld, alsook op welke wijze zij bij de opnemingen wordt gebruikt. In de eerste plaats zullen de straalformules voor de meridianen en parallellen worden afgeleid en nagegaan worden hoe het net geconstrueerd zou kunnen worden.

Bovenstaande figuur is geteekend in het vlak van den meridiaan van Amersfoort, voor de breedte van deze plaats $\varphi_0 = 52^\circ\ 9'\ 22''.18$. Zij PP_1 de aardas, EQ de equator, A Amersfoort, O het oogpunt en $C'B'$ de doorsnede van het vlak van teekening met het er loodrecht opstaande projectievlak. M is het centrale punt der kaart, gelegen op de middellijn OA van den bol. De ligging van het punt M wordt gegeven door de betrekking $\frac{OM}{2r} = m_0$, waarin r de bolstraal en m_0 de vergrooting [1]) in het centrale punt is. P' is de ligging van de pool in het projectie-vlak en wordt bepaald door $P'M = OM\ tg \angle MOP = 2\ m_0 r\ tg\ \frac{1}{2}\ \delta_0$, als δ_0 de poolsafstand

1) Het begrip „vergrooting" is in algemeenen zin bedoeld. Feitelijk treedt in het gedeelte van het projectievlak, dat binnen den bol gelegen is een verkleining op, daar buiten een vergrooting.

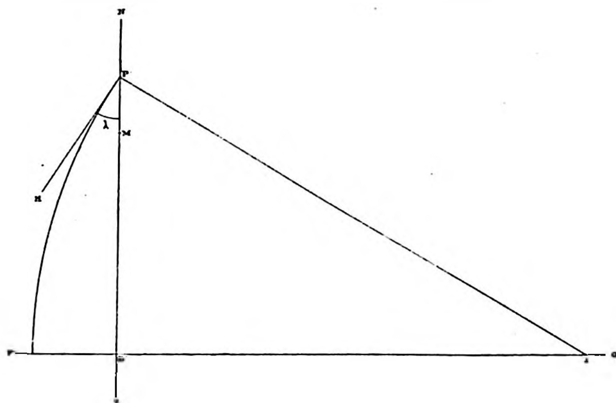
van Amersfoort is. De meridiaan van Amersfoort wordt afgebeeld door de rechte lijn $C'B'$.

Ingevolge do boven bewezen eigenschap der projectie zullen de projecties der overige meridianen cirkelbogen zijn. Ook met de parallellen is dit in het algemeen het geval; de parallel door het oogpunt zal evenwel als rechte lijn worden geprojecteerd, omdat alle lijnen van uit 0 naar die parallel getrokken liggen in het parallelvlak, dat loodrecht op het vlak van de teekening staat. De projectie van die parallel wordt dus gevormd door de doorsnede van het parallelvlak met het projectievlak en staat in B' loodrecht op het vlak van teekening. Deze lijn is voor de constructie van het net van belang, aangezien ingevolge de conformiteit der projectie, alle meridianen en parallellen elkander in het net rechthoekig snijden, dus ook deze rechte parallel rechthoekig door de meridianen gesneden wordt, bijgevolg de middelpunten der meridianen op deze parallel gelegen moeten zijn.

Om gelijke reden liggen de middelpunten der parallellen op den als rechte lijn afgebeeld wordende middenmeridiaan, d. i. op de lijn $C'B'$. De afstand MB' tusschen het centrale punt en het snijpunt van den middenmeridiaan met de als rechte lijn afgebeeld wordende parallel kan berekend worden uit de formule:

$$MB' = OM\, tg\, \varphi_0 = 2\, m_0 r\, tg\, \varphi_0$$

Met behulp van het bovenstaande kunnen de meridianen van het net geteekend worden. Zij in de onderstaande figuur, liggende in het projectievlak, NZ de projectie van den middenmeridiaan en in die lijn het centrale punt M aangenomen.



Wordt van af M afgezet

$$P'M = 2\, m_0 r\, tg\, \tfrac{1}{2}\, \delta_0$$

dan is P' de projectie van de pool. Eveneens $MB' = 2\, m_0 r\, tg\, \varphi_0$ makende

en door B' de loodlijn FG trekkende, is FG de als rechte lijn afgebeeld wordende parallel.

Aangezien de projectie conform is, maakt een meridiaan, welke een lengteverschil λ met Amersfoort heeft, in P' ook een hoek λ met den middenmeridiaan. Trekt men dus de lijn $P'H$ onder dien hoek met $P'Z$ en richt in P' op die lijn de loodlijn $P'I$ op, dan is het snijpunt van die loodlijn met de lijn FG het middelpunt van den gezochten meridiaan en $P'I$ de straal.

De afstand $B'I$, dat is tusschen het snijpunt van den als rechte lijn afgebeeld wordenden middenmeridiaan en de als rechte lijn afgebeeld wordende parallel en het middelpunt van een willekeurigen meridiaan, wordt door berekening gevonden als volgt:

In de eerste figuur is $\angle\ OPR = \angle\ POR = \frac{1}{2}\,\delta_0$, $\angle\ P''R\ P = \varphi_0$ dus $\angle\ MP'\ O = R\ P''O = \frac{1}{2}\,\delta_0 + \varphi_0$. Eveneens is $\angle\ P'O\ B' = \frac{1}{2}\,\delta_0 + \varphi_0$ dus

$$B'\ P' = OB' = \frac{OM}{\cos\varphi_0} = 2\ m_0\ r\ sec\ \varphi_0$$

Dienvolgens is in de tweede figuur:

$B'\ I = B'\ P'\ tg\ B'\ P'\ I = 2\ m_0\ r\ sec\ \varphi_0\ cot\ \lambda$ en de straal van den gezochten

$$\text{meridiaan P}'\,\text{I} = \frac{B'\ I}{\sin B'\ P'\ I} = \frac{2\ m_0\ r\ sec\ \varphi_0\ cot\ \lambda}{\cos\lambda} = 2\ m_0\ r\ cosec\ \lambda\ sec\ \varphi_0.$$

De formules voor den afstand van het middelpunt van een willekeurige parallel (welk middelpunt op den middenmeridiaan ligt) en voor den bijbehoorenden parallelstraal worden als volgt gevonden (zie eerste figuur). $\angle\ MOD' = \frac{1}{2}\ \angle\ MRD = \frac{1}{2}\,(\varphi - \varphi_0)$, waarin φ de breedte is van de te construeeren parallel.

$$\angle\ C'OM = \frac{1}{2}\ \angle\ CRM = \frac{1}{2}\left\{180^\circ - \varphi - \varphi_0\right\} = 90^\circ - \frac{1}{2}\,(\varphi + \varphi_0).$$

$$MD' = OM\ tg\ MOD' = 2\ m_0\ r\ tg\ \tfrac{1}{2}\,(\varphi - \varphi_0)$$

$$MC' = OM\ tg\ C'OM = 2\ m_0\ r\ cot\ \tfrac{1}{2}\,(\varphi + \varphi_0)$$

Zij K' het middelpunt van de te construeeren parallel, dan is de straal

$$K'D' = \tfrac{1}{2}\,(MC' - MD') = m_0\,r\left\{cot\ \tfrac{1}{2}\,(\varphi + \varphi_0) - tg\ \tfrac{1}{2}\,(\varphi - \varphi_0)\right\}$$

en de afstand $K'M = K'D' + MD' = m_0\ r\left\{cot\ \tfrac{1}{2}\,(\varphi + \varphi_0) + tg\ \tfrac{1}{2}\,(\varphi - \varphi_0)\right\}$

Deze formules zijn te herleiden tot:

$$K'M = \frac{m_0\ r\ \cos\varphi_0}{\sin\frac{1}{2}\,(\varphi + \varphi_0)\ \cos\frac{1}{2}\,(\varphi - \varphi_0)}$$

$$\text{parallelstraal} = \frac{m_0\ r\ \cos\varphi}{\sin\frac{1}{2}\,(\varphi + \varphi_0)\ \cos\frac{1}{2}\,(\varphi - \varphi_0)}.$$

De constructie zou dus als volgt moeten verloopen.

Men trekt een rechte lijn, welke de projectie van den middenmeridiaan voorstelt, neemt op die lijn het centrale punt M aan en zet van dit punt op schaal af den afstand $2\ m_0\ r\ tg\ \varphi_0$, waardoor het punt B' ver-

kregen wordt. In dit punt een loodlijn oprichtende, verkrijgt men de als rechte lijn afgebeeld wordende parallel, waarop de middelpunten der meridianen liggen. Deze middelpunten worden verkregen door van B' voor de geographische lengten dier meridianen de afstanden $2\, m_0\, r \sec \varphi_0 \cot \lambda$ af te zetten. Vervolgens beschrijft men uit die middelpunten de meridianen met de stralen $2\, m_0\, r \sec \varphi_0 \operatorname{cosec} \lambda$.

Daarna zet men van M uit de afstanden $\dfrac{m_0\, r \cos \varphi_0}{\sin \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_0) \cos \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0)}$, verkrijgt daardoor de middelpunten der parallellen en beschrijft deze met

de stralen $\dfrac{m_0\, r \cos \varphi}{\sin \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_0) \cos \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0)}$.

Is deze constructie voor zeer kleine schalen, b.v. voor halfronden, zeer goed doenlijk, voor de schalen die gebruikt worden bij de opnemingen der Ned. zeegaten, is zij niet uitvoerbaar van wege de afmetingen, welke de afstanden en stralen daarbij krijgen. Om dit met een voorbeeld toe te lichten, zij de constructie nagegaan van een net voor een kaart van het zeegat van Vlissingen, tusschen 51° 16′ en 51° 38′ N.B., 2° 56′ en 3° 36′O.l. op de schaal van 1:50.000, waarbij ondersteld wordt dat over papier van onbegrensde afmeting beschikt wordt.

Men trekt den meridiaan van Amersfoort en neemt daarop aan het punt M. Van dit punt naar beneden (het Zuiden) afzettende 328.588 M. verkrijgt men het punt B'. In dit punt richt men de loodlijn op en zet daarop naar rechts (het Oosten) af 9707.99 M. en 13332.16 M. waardoor de middelpunten der beide uiterste meridianen verkregen worden. Uit deze middelpunten cirkels beschrijvende met stralen van 9716.82 M. en 13338.62 M. worden de uiterste meridianen verkregen. Van M naar boven afzettende 99.767 M. en uit het verkregen punt een cirkel beschrijvende met 101.748 M. verkrijgt men de parallel van 51° 16′; voor de parallel van 51° 38′ bedragen deze waarden 99.520 en 100.685 M.

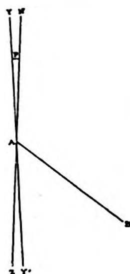
Hoewel de beschrijving dezer wiskundige constructie geschikt is om zich een denkbeeld te vormen van het net, is de methode niet bruikbaar voor de praktijk en dient daarvoor een andere oplossing van het vraagstuk gezocht te worden. Hoe dit geschiedt, zal aangegeven worden bij de beschrijving van de toepassing der projectie.

De coördinaten van de door de Rijksdriehoeksmeting bepaalde punten, alsmede van de in aansluiting daarop door de afdeeling Hydrographie vastgelegde punten, zijn uitgedrukt in meters ten opzichte van een rechthoekig stelsel, liggende in het projectievlak met den oorsprong in de projectie van het driehoekspunt Amersfoort. De y as van dit stelsel vormt de meridiaan van het centrale punt, welke als rechte wordt afgebeeld. De x as staat loodrecht op de y as, doch valt niet samen met de parallel van het centrale punt.

De kenbare punten ten dienste van de opneming der Nederlandsche zeegaten zijn met hunne rechthoekige coordinaten opgenomen in een Verzamelstaat, welke echter nog slechts tot en met het Brouwershavensche gat gereed is. Teneinde deze punten in onderling verband op een con-

structieblad aan te brengen, worden daarop een stel evenwijdige lijnen getrokken, onderling van elkander verwijderd op een afstand op schaal gelijk aan een te kiezen aantal meters, rechthoekig gekruist door een tweede stel met gelijken onderlingen afstand tusschen de lijnen. Deze lijnen en die van het eerste stel worden aangenomen evenwijdig te zijn aan de beide assen van het coördinaten stelsel en op afstanden van die assen verwijderd te zijn, welke verband houden met het te bewerken terrein en de gekozen schaal.

Aangezien de projectie conform is, kunnen snelliussen zonder eenige verteekening worden afgezet. Bij het construeeren van azimuthale richtingen moet echter in het oog gehouden worden, dat de lijnen evenwijdig aan de y as loopende niet de Noord-Zuid richting aangeven, evenmin die, evenwijdig aan de x as, de richting Oost-West. Kent men het richtingsverschil ter plaatse tusschen den meridiaan en de lijn evenwijdig aan de y as, dan kan men dit op het af te zetten azimuth toepassen en vervolgens den hoek ten opzichte van de evenwijdige lijn afzetten.



B.v. moet uit A de richting AB volgens azimuth NAB worden afgezet en kent men het hoekje p, dan wordt ten opzichte van de lijn YY' de hoek YAB afgezet. Zooals op de volgende blz. zal blijken is $sin\ p = \frac{x}{r_p}$, waarin x de abscis van het betrokken punt en r_p de parallelstraal is. De logarithme van $\frac{1}{r_p}$ vindt men in de tafel achter in dit werkje.

Een zelfde net van elkander onderling rechthoekig snijdende coördinatenlijnen kan gebruikt worden voor het minuutblad, teneinde daarop de uitgevoerde constructies van het constructieblad over te brengen. Deze netten zijn zeer eenvoudig te construeeren en voor een zelfde schaal voor het geheele Rijk gelijk, terwijl ze tevens voor veelvouden van die schaal gebruikt kunnen worden, waarbij dan slechts de afstanden tusschen de coördinaatlijnen overeenkomstige gedeelten van de eerste zijn. Eenvoudigheidshalve worden de netten dan ook gedrukt, met een vasten afstand tusschen de lijnen van 50 m.M.

Ten slotte wordt de teekening van het minuutblad op de netkaart overgebracht met behulp van hetzelfde net. Ten behoeve van het gebruik der gedrukte kaart wordt dit net echter op deze weggelaten en vervangen door een net van parallellen en meridianen. Om echter op de afdeeling Hydrographie latere gedeeltelijke opnemingen gemakkelijk te kunnen invoegen, worden de uiteinden der coördinaatlijnen door kleine streepjes tegen den buitenrand der kaarten aangegeven.

Het net van parallellen en meridianen wordt op de netkaart op de volgende wijze aangebracht. Berekend worden de coördinaten van een regelmatig over de kaart verdeeld aantal snijpunten van de betrokken parallellen en meridianen. Vervolgens worden deze snijpunten in het net afgezet en door rechte lijnen verbonden. De cirkelboogvormige meridianen en parallellen worden dus door rechte lijnen en door gebroken lijnen vervangen. De formules om

de coördinaten van deze snijpunten te berekenen, kunnen als volgt worden afgeleid.

Zij S een dergelijk snijpunt, de hoek tusschen den parallelstraal r_p, getrokken naar dat punt, en de y as p, de meridiaanstraal r_m. Zij M het centrale punt, $SC = x$ en $MC = y$, dan is $x = r_p \sin p$

$y = MC = MD' + CD'$ en daar MD' (zie bladz. 60) gelijk is aan

$$2 m_o r \; tg \tfrac{1}{2} (\varphi - \varphi_0)$$

$$y = 2 m_o r \; tg \tfrac{1}{2} (\varphi - \varphi_0) + r_p (1 - \cos p).$$

De hoek p wordt als volgt bepaald:

In de figuur is $\angle P' = \angle P'IF = \lambda$ en $x = EB' = FB' - FE$

dus: $r \; \sin p = r_m (1 - \cos \lambda) - r_m (1 - \cos p)$

of $r_p \sin p + r_m (1 - \cos p) = r_m (1 - \cos \lambda)$ $\qquad (a)$.

Eveneens is $y = SE - MB' = r_m \sin p - 2 m_o r \; tg \; \varphi_0$, waarbij voor MB' de waarde gevonden op blz. 59 is ingevoerd,

dus: $2 m_o r \; tg \tfrac{1}{2} (\varphi - \varphi_0) + r_p (1 - \cos p) = r_m \sin p - 2 m_o r \; tg \; \varphi_0$

of $r_m \sin p - r_p (1 - \cos p) = 2 m_o r \left\{ tg \tfrac{1}{2} (\varphi - \varphi_0) + tg \; \varphi_0 \right\}$ $\qquad (b)$.

De vergelijking a vermenigvuldigende met r_m en b met r_p, daarna de uitkomsten van elkander aftrekkende, wordt verkregen:

$$(r_m^2 + r_p^2)(1 - \cos p) = r_m^2 (1 - \cos \lambda) - 2 m_o r \, r_m \left\{ tg \tfrac{1}{2} (\varphi - \varphi_0) + tg \; \varphi_0 \right\}$$

Vervolgens a met r_p vermenigvuldigende en b met r_m, daarna de vergelijkingen optellende, krijgt men:

$$(r_m^2 + r_p^2) \sin p = r_m \, r_p (1 - \cos \lambda) + 2 m_o r \, r_m \left\{ tg \tfrac{1}{2} (\varphi - \varphi_0) + tg \; \varphi_0 \right\}$$

Deze vergelijkingen op elkander deelende, wordt in het eerste lid $tg \tfrac{1}{2} p$ verkregen. Het tweede lid kan, door invoering der eerder gevonden waarden voor r_m en r_p en herleiding, vervormd worden, zoodat men ten slotte krijgt:

$$tg \tfrac{1}{2} p = \frac{\sin \tfrac{1}{2} (\varphi + \varphi_0)}{\cos \tfrac{1}{2} (\varphi - \varphi_0)} \, tg \tfrac{1}{2} \lambda.$$

De formules voor x en y kunnen nu als volgt worden vervormd:

$$x = r_p \sin p = 2\, r_p \sin \tfrac{1}{2} p \cos \tfrac{1}{2} p = 2\, r_p\, tg\, \tfrac{1}{2} p \cos^2 \tfrac{1}{2} p.$$

$$y = 2\, m_0 r\, tg\, \tfrac{1}{2} (\varphi - \varphi_0) + r_p \sin p \frac{1 - \cos p}{\sin p} = 2\, m_0 r\, tg\, \tfrac{1}{2} (\varphi - \varphi_0) + x\, tg\, \tfrac{1}{2} p.$$

De waarde van $\log 2\, m_0 r$ is 7.105991.

Keeren wij nu terug naar het voorbeeld van de kaart van het zeegat van Vlissingen en berekenen wij voor de vastlegging van de uiterste meridiaan van 2°56′ de coördinaten der snijpunten met de parallellen van 51°16′,51°24′,51°28′ en 51° 36′. In de onderstaande tabel zijn naast de coördinaten de waarden gesteld, verkregen door die van de uiterste snijpunten in reden van de breedteverschillen te middelen. Deze waarden zijn gemerkt x' en y'.

N.Br.	x	x'	$x-x'$	y	y'	$y-y'$
51° 16′	— 171 248.39	— 171 248.39	0	— 96 068.89	— 96 068.89	0
51 24	— 170 749.40	— 170 749.09	— 0.31	— 81 243.09	— 81 242.95	— 0.14
51 28	— 170 499.80	— 170 499.45	— 0.35	— 73 830.11	— 73 829.98	— 0.13
51 36	— 170 000.15	— 170 000.15	0	— 59 004.04	— 59 004.04	0

Hieruit blijkt dat de rechte, tusschen de beide uiterste snijpunten getrokken, ongeveer 4 dM afwijkt van den juisten cirkelboogvormigen meridiaan, hetgeen niet te teekenen zou zijn.

Op bladz. 61 bleek reeds dat de parallelstraal veel kleiner is dan de meridiaanstraal. Berekent men de snijpunten van de parallel van 51° 16′ met de meridianen van 2° 56′ tot 3° 36′ om de acht minuten en leidt men even als boven de x' en y' af door de verschillen tusschen de coördinaten der uiterste snijpunten evenredig te verdeelen, dan krijgt men:

O.L.	x	x'	$x-x'$	y	y'	$y-y'$
2° 56′	— 171 248.39	— 171 248.39	0	— 96 068.89	— 96 068.89	0
3 4	— 161 947.37	— 161 946.65	— 0.72	— 96 373.21	— 96 339.25	— 33.36
3 12	— 152 645.90	— 152 644.91	— 0.99	— 96 660.61	— 96 609.61	— 51.00
3 20	— 143 344.13	— 143 343.18	— 0.95	— 96 930.97	— 96 879.98	— 50.99
3 28	— 134 042.00	— 134 041.44	— 0.56	— 97 184.35	— 97 150.34	— 34.01
3 36	— 124 739.70	— 124 739.70	0	— 97 420.70	— 97 420.70	0

Uit deze tabel blijkt duidelijk dat het weergeven der parallellen door rechte lijnen niet veroorloofd is. Op de aangenomen schaal van 1 : 50.000 zou de rechte in het midden 1 mM. boven de werkelijke parallel liggen. Verbindt men de snijpunten van de parallel van 51° 16′ met de meridianen van 2° 56′ en 3° 12′ door een rechte, dan zal die lijn ongeveer

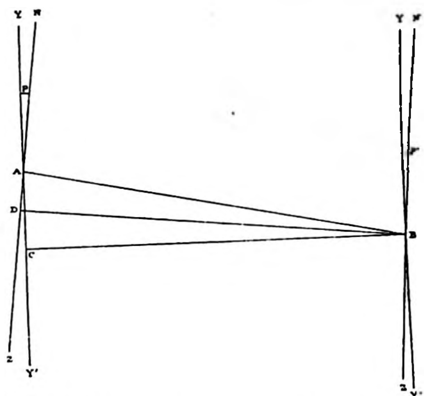
9 M. boven het snijpunt der parallel met den meridiaan van 3° 4′ langs gaan.

Op de Nederlandsche kaarten worden de parallellen om de 8′ gebroken en uit het bovenstaande volgt, dat daarbij geen noemenswaardige afwijking ontstaat. Volgens berekening is de grootste afwijking tusschen koorde en boog 2.3 M.

Deze berekeningen geven tevens een denkbeeld van de fout, welke begaan wordt door de loxodroom als een rechte lijn in de kaart af te beelden. Ligt de loxodroom in de richting van den meridiaan, dan is de fout praktisch nul. Zij bereikt haar grootste waarden, indien de loxodroom een parallelcirkel is. Alsdan zal de afwijking tusschen de rechte en de theoretisch juist afgebeelde loxodroomkromme op de gekozen schaal bij een afstand van ruim 16 lengteminuten of 10 zm. 0.2 m.M. bedragen; bij een afstand van 25 zm. ongeveer 1 m.M. In de navigatie komen loxodromen van laatstgenoemde lengte bij het bevaren der Nederlandsche zeegaten niet voor, zoodat ook in dit opzicht de projectie aan den gestelden eisch voldoet.

Alsnog zal aangegeven worden hoe uit de rechthoekige coördinaten de geographische berekend worden. Bij de Rijksdriehoekmeting wordt daarvoor uit de eerste coördinaten het breedte- en het lengteverschil met het centrale punt te Amersfoort berekend, hetgeen een vrij langdurige methode is, waarbij de ellipsoïde-gedaante der aarde niet mag worden verwaarloosd. Voor hydrographische doeleinden kan met voldoende nauwkeurigheid volstaan worden door een *benaderde* afleiding der gezochte breedte en lengte uit die van een nabij gelegen punt der Rijksdriehoeksmeting.

Zij in onderstaande figuur *B* het punt, waarvan zoowel de rechthoekige als de geographische coördinaten bekend zijn en *A* het punt, waarvan alleen de eerste zijn gegeven.



Zij *YY′* de richting der evenwijdigen aan den *Y*-as en *NZ* de meridianen in beide punten. Volgens de figuur is

$$tg\ YAB = \frac{x_A - x_B}{y_B - y_A}$$

Azimuth $AB = \angle YAB - p$

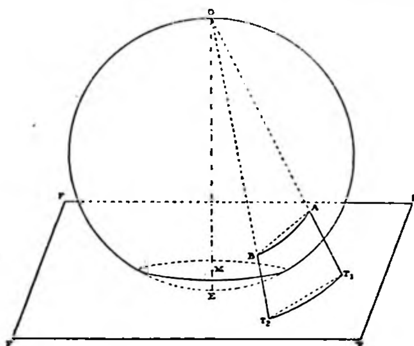
$$AB = \frac{x_A - x_B}{\sin YAB} = \frac{y_B - y_A}{\cos YAB}$$

Indien men met dit azimuth en dezen afstand het breedte- en lengteverschil tusschen *B* en *A* ging berekenen, zouden echter te onnauwkeurige uitkomsten worden verkregen. Immers het azimuth van *A* naar *B* is niet gelijk aan dat van *B* naar *A* (vermeerderd met 180°), omdat in beide punten het hoekje *p* een verschillende waarde heeft.

Derhalve gebruikt men het gemiddeld azimuth T door op den hoek YAB niet het hoekje p doch $\frac{1}{2}(p+p')$ of het richtingsverschil voor een punt midden tusschen A en B toe te passen.

Verder geeft AB de kaartafstand weer, welke van den bolafstand verschilt, omdat de afstanden door de projectie vervormd worden. Men dient dus den kaartafstand tot den bolafstand te herleiden, hetgeen geschieden kan door op eerstgenoemde een correctie toe te passen, welke op de volgende wijze wordt gevonden.

Zij in de onderstaande figuur E het midden van het terrein (Amersfoort), M het centrale punt, AB de afstand tusschen de beide punten op den bol en de koorde $T_1\ T_2$ de afstand tusschen die punten in de kaart.



De vergrooting in de kaart in het punt T_1 is gelijk aan de verhouding van $bg\ T_1\ T_2$ tot $bg\ AB$ voor het geval, dat B op oneindig kleinen afstand tot A genaderd is. Dus de vergrooting in $T_1 = m_1$ stellende, is

$$m_1 = lim. \frac{T_1\ T_2}{AB}.$$

Nu zijn de beide driehoeken OAE en OMT_1 rechthoekig. Zij hebben den tophoek gemeen en zijn dus gelijkvormig. Hieruit volgt $OA : OM = OE : OT_1$ of $OA \times OT_1 = OM \times OE = m_0 \times 2r \times 2r = 4\,m_0 r^2$. Evenzoo is $OB \times OT_2 = 4\,m_0 r^2$ dus $OA \times OT_1 = OB \times OT_2$ of $OA : OT_2 = OB : OT_1$ waaruit volgt: $\triangle\ OAB \infty \triangle\ OT_1\ T_2$ en $T_1\ T_2 : AB = OT_1 : OB$

Nadert A tot op oneindig kleinen afstand B, dan nadert OA tot OB

$$\text{dus } m_1 = lim. \frac{T_1\ T_2}{AB} = lim. \frac{OT_1}{OB} = \frac{OT_1}{OA}$$

$$\text{en daar } OA = \frac{4\ r^2 m_0}{OT_1}$$

$$m_1 = \frac{OT_1^2}{4r^2 m_0} = \frac{OM^2 + MT_1^2}{4\ r^2 m_0} = \frac{4\ r^2 m_0^2 + MT_1^2}{4\ r^2\ m_0}$$

waarin MT_1 de afstand van het centrale punt tot het punt T_1 in de kaart is.

Uit de formule blijkt dat m_1 afhangt van den afstand tot Amersfoort. De waarde van $log\ m_1$ is voor ons land hoogstens 4 voor de vijfde decimaal.

Voor het onderwerpelijke doel kan de waarde van m_1 gelijk aan die van m_2 gesteld worden en mag dus aangenomen worden

$$\text{bolafstand } AB = \frac{\text{kaartafstand } AB}{m_1}$$

waarbij tevens het verschil tusschen de koorde en den boog verwaarloosd wordt.

Op het kaartje, achter in dit werkje voorkomende, kan op het oog de waarde van $log \frac{1}{m_1}$ worden afgelezen met het teeken, waarmede deze logarithme op die van den kaartafstand AB moet worden toegepast. Om de werkelijke waarde van $log \frac{1}{m_1}$ te kennen, moet dus het teeken worden omgedraaid. Uit dit kaartje kan worden nagegaan, voor welke streken de lengtevervorming absoluut nul is, hetgeen het geval is voor die, waarover de cirkel gemerkt „0" loopt.

Met het gemiddeld azimuth en den verkregen bolafstand, wordt het breedte- en lengteverschil tusschen de punten B en A berekend met behulp van de formules:

$$\Delta\, b = \frac{\text{bolafstand } AB}{m} \cos T \qquad \Delta\, l = \frac{\text{bolafstand } AB}{p} \sin T$$

Hierin is m de lengte in meters van de breedtesecunde en p de lengte in meters van de lengtesecunde. Beiden worden genomen voor de middelbreedte; $log \frac{1}{m}$ en $log \frac{1}{p}$ worden gevonden in de tafel achter in dit werkje. Zij zijn berekend voor de Besselsche ellipsoïde, waarvoor de afplatting is aangenomen $\frac{1}{299.1528}$.[1])

In dezelfde tafel vindt men de waarde van $log \frac{1}{r_p}$ noodig voor berekening van het hoekje p, volgens de formule $\sin p = \frac{x}{r_p}$ (blz. 62).

Voorbeeld. Zij gevraagd de geographische breedte en lengte van Hoedekenskerke af te leiden uit die van Grauw.

Gegeven Grauw:	$x_1 = -\ 89392.4$	$y_1 = -\ 91093.9$
	N.br. $= 51^\circ\ 19'\ 48''.76$	*O.l.* $= 4^\circ\ 6'\ 17''.36$
Hoedekenskerke:	$x_2 = -\ 102565.1$	$y_2 = -\ 80349.7$

Berekening

Breedte	Hoedekenskerke (geschat)	$51^\circ 25' 30''$	$x_2 = -102565.1$	$y_2 = -80349.7$
„	Grauw	$51^\circ 19' 48''.76$	$x_1 = -\ 89392.4$	$y_1 = -91093.9$
Middelbreedte		$51^\circ 22' 40''$	$\Delta\, x = -\ 13172.7$	$\Delta\, y = +10744.2$
			$\frac{1}{2}(x_2 + x_1) = -95978.7$	

[1]) De benoemingen: m_1 voor de plaatselijke vergrooting, m voor de lengte in meters van de breedtesecunde, p voor den hoek tusschen de y as en de raaklijn aan den meridiaan en eveneens voor de lengte in meters voor de lengte secunde, *kunnen* aanleiding tot verwarring geven. De eerste en derde zijn afkomstig van de Rijksdriehoeksmeting, de tweede en vierde zijn van oudsher in gebruik bij de Nederlandsche hydrographie. Het komt derhalve nog minder storend voor de benoemingen ongewijzigd te behouden, dan twee er van, enkel voor het naast elkander gebruiken in het onderhavige vraagstuk, te veranderen.

$\log \Delta x = 4.119676\,(-)$	$\log \frac{1}{2}(x_2+x_1) = 4.982175\,(-)$	$\log \Delta x = 4.119676\,(-)$
$\log \Delta y = 4.031174$	$\log \frac{1}{r_p} = 3.294335$	$\log \sin \angle$ met y as $= 9.889258\,(-)$
$\log tg \angle$ met y as $= 0.088502\,(-)$	$\log \sin p = 8.276510\,(-)$	$\log$ kaartafstand $= 4.230418$
hoek met y as $= 309^\circ\ 12'\ 7''$	$p = -1^\circ\ 4'\ 58''.4$	corr. volgens kaartje $5\,(-)$
$p = -1^\circ\ 4'\ 58''$		$\log$ bolafstand $= 4.230413$
$T\ \ 308^\circ\ 7'\ 9''$		

$\log$ bolafstand $= 4.230413$	$\log$ bolafstand $= 4.230413$
$\log \cos T = 9.790495$	$\log \sin T = 9.895825\,(-)$
$\log \frac{1}{m} = 8.510025$	$\log \frac{1}{p} = 8.713583$
$\log \Delta b = 2.530933$	$\log \Delta l = 2.839821\,(-)$
$\Delta b = 5'\ 39''.57$	$\Delta l = -11'\ 31''.55$

Grauw	$51^\circ\ 19'\ 48''.76$	$4^\circ\ 6'\ 17''.36$
	$\Delta b = 5'\ 39''.57$	$\Delta l = -11'\ 31''.55$
Hoedekenskerke	$51^\circ\ 25'\ 28''.33$ *N.b.*	$3^\circ\ 54'\ 45''.81$ *O.l.*
Volgens R.D.M.	51 25 28 .34 „	3 54 45 .82 „

Met opzet zijn in dit voorbeeld twee punten gekozen, welke op aanmerkelijken afstand uit elkander liggen. Ook dan zelfs blijkt de benaderingsmethode voldoend nauwkeurige resultaten te geven. In het algemeen is het wenschelijk voor het punt, waaruit de verlangde breedte en lengte wordt afgeleid, een dichter bij gelegen punt der Rijksdriehoekmeting te kiezen, hetgeen wel steeds mogelijk zal zijn.

Bij hetgeen hierboven over de stereographische projectie is medegedeeld, werd overeenkomstig de inleiding de aarde als volkomen bol aangenomen.

De Rijksdriehoeksmeting verwaarloost den ellipsoïdevorm der aarde niet. Daarbij wordt het driehoeksnet voor het opgemeten gedeelte der aarde beschouwd te liggen op de Besselsche ellipsoïde en de platte kaart van dit net wordt verkregen door tweeledige overbrenging, zoogenaamde dubbelprojectie. De eerste overbrenging is de conforme overbrenging van de ellipsoïde op een bol, waarbij de straal van den bol gelijk is genomen aan den gemiddelden kromtestraal voor het punt der ellipsoïde, dat samenvalt met het centrale punt der kaart. De tweede overbrenging is de behandelde van den bol naar het platte vlak volgens de stereographische projectie.

Zooals reeds op bladz. 14 is medegedeeld, wordt door den Topographischen Dienst in Nederlandsch-Indië veelvuldig de polyeder-projectie gebruikt. Op kusten waar door dien dienst reeds triangulatie-metingen verricht zijn, behoeft dit voor de hydrographische opnemingen niet te geschieden, doch kan met voordeel gebruik gemaakt worden van de nauwkeurige resultaten door den topographischen dienst gewonnen. Daarvoor is het gewenscht enkele zaken over de gebruikte polyeder-projectie mede te deelen.

Het in kaart te brengen deel der aarde wordt daarbij volgens de parallellen en meridianen verdeeld gedacht in trapeziumvormige stukken,

welke ieder op zichzelf volgens de conforme kegelprojectie (bladz. 31) naar het platte vlak worden overgebracht.

Door die stukken „graadafdeelingen" genoemd, klein genoeg te nemen, kan men de vervormingen en de gapingen tusschen de afdeelingen zoo gering maken als verkozen wordt. Voor de Indische kaarten is voor de afstanden der verdeelende parallellen en meridianen 20′ genomen; elke graadafdeeling beslaat dus 20 breedte-minuten bij 20 lengte-minuten.

Bij de conforme kegelvormige projectie heeft de vergrooting langs een zelfde parallel een constante waarde. Neemt men daarvoor voor de parallel van het centrale punt de eenheid, dan is het bedrag langs de beide parallellen, welke boven- en benedenrand vormen, gelijk aan 1.000004; de lengtevervorming is op de kaart dus onmerkbaar.

Wegens de groote lengte der stralen van de cirkelbogen, welke boven en benedenrand vormen en de geringe breedte der graadafdeelingen, zijn de pijlen dier bogen zeer klein. Voor de uiterste graadafdeelingen van Java, bedraagt de pijl nog slechts 4.1 M. bij een lengte van den rand van 37000 M.; op de schaal 1 : 25.000 is dit dus slechts 0.16 mM. De parallellen kunnen derhalve ook door rechte lijnen worden weergegeven, zoodat de graadafdeelingen den vorm verkrijgen van symmetrische trapeziums, wier langste evenwijdige zijde naar den equator is gekeerd en op een schaal van 1 : 25.000 hoogstens 1.3 mM. grooter is dan de kortste evenwijdige zijde.

De driehoekspunten worden gegeven in rechthoekige coördinaten, ten opzichte van een stelsel, waarvan de oorsprong ligt in het centrale punt van de betrokken graadafdeeling. De y as wordt gevormd door den meridiaan van het centrale punt; de x as door de loodlijn in dit punt op den meridiaan opgericht, zij is dus rakende aan de parallel van het centrale punt en valt daar praktisch mee samen.

Men vindt de rechthoekige coördinaten der driehoekspunten in den regel opgegeven in uitgaven van den Topographischen Dienst. Als zoodanig kan bijv. genoemd worden „Driehoeksnet van Sumatra's Westkust. De coördinaten der driehoekspunten". Naast de x en y is het nummer der betrokken graadafdeeling gegeven.

In een afzonderlijke tabel zijn van elke graadafdeeling de begrenzende meridianen en de begrenzende parallellen opgegeven, benevens de lengte en breedte van het centrale punt. De driehoekspunten der eerste orde zijn in een afzonderlijke tabel ook in lengte en breedte opgegeven. Van nog in gang zijnde triangulatiën worden de gegevens der bepaalde driehoekspunten en graadafdeelingen in het jaarboek van den Topographischen Dienst medegedeeld.

Aangezien de hydrographische opneming in Indië werkt met geographische coördinaten, moet men de rechthoekige coördinaten tot geographische kunnen herleiden. Dit geschiedt op de navolgende wijze:

Gegeven: l_0 de geographische lengte van het centrale punt der graadafdeeling waarin het punt gelegen is; oostelijk *positief*, westelijk *negatief* genomen. In de betrokken uitgave staat het punt of de meridiaan vermeld, ten opzichte waarvan de lengte gerekend is. φ_0 de geographische breedte van het centrale punt, zoowel noordelijk als zuidelijk *positief* genomen; x en y de rechthoekige coördinaten van het driehoekspunt.

Gevraagd: l de geographische lengte; φ de geographische breedte van het driehoekspunt, wat de teekens betreft evenzoo behandeld als l_0 en φ_0.

Zij verder λ het geographische lengteverschil en β het geographische breedteverschil tusschen het betrokken driehoekspunt en het centrale punt. Alsdan is: $\lambda = Ax + Cxy$

$\beta = By - Dx^2$

indien het centrale punt *noordelijke* breedte heeft en:

$\lambda = Ax - Cxy$

$\beta = - By - Dx^2$

indien het centrale punt *zuidelijke* breedte heeft.

In beide gevallen: $l = l_0 + \lambda$

$\varphi = \varphi_0 + \beta.$

Met deze formules vindt men λ en β in secunden.

De hoofdletters stellen voor:

$$A = \frac{1}{N_0 \cos \varphi_0 \; bg \; 1''} \qquad B = \frac{1}{R_0 \; bg \; 1''}$$

$$C = \frac{tg \; \varphi_0}{N_0^2 \cos \varphi_0 \; bg \; 1''} \qquad D = \frac{tg \; \varphi_0}{2 \; N_0 R_0 \; bg \; 1''}$$

Waarin: N_0 de normaal en R_0 de meridiaankromteschaal voor de breedte φ_0. De maximumwaarden van de correctietermen met de coëfficienten C en D zijn voor $x = y = 18500$ M. en voor $\varphi_0 = 2^\circ 30'$ eerst 0".08 en 0".04; voor die waarden zijn dus steeds logarithmen met drie decimalen voldoende. De waarden van *log A* en *log B* tot in zes en van *log C* en *D* tot in drie decimalen zijn voor de verschillende waarden van φ_0 opgegeven in onderstaande tafel.

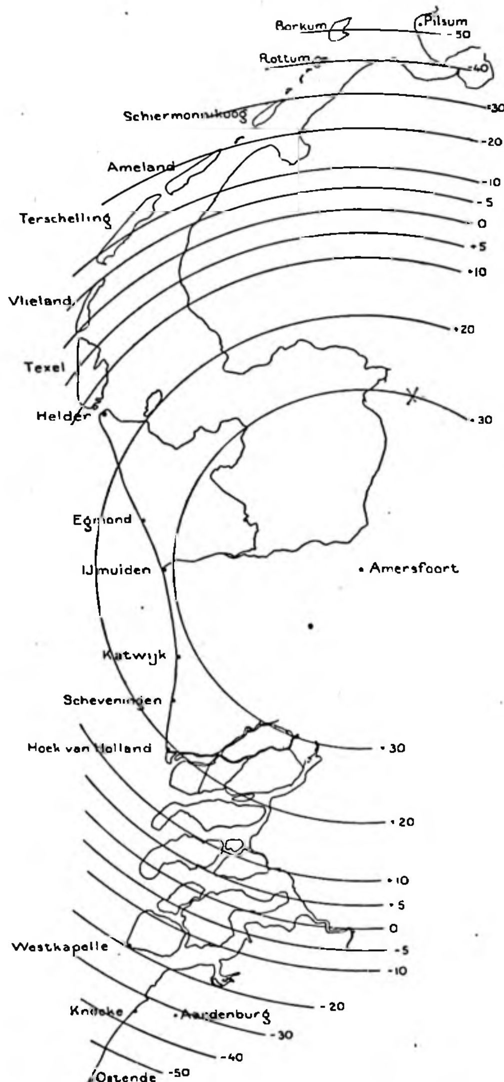
φ_0	*log A*	*log B*	*log C*	*log D*	φ_0	*log A*	*log B*	*log C*	*log D*
0° 10'	8.509784	8.512690	9.169	8.871	5° 10'	8.511538	8.512655	0.663	0.363
30	8.509798	8.512690	9.646	9.348	30	8.511772	8.512650	0.691	0.391
50	8.509827	8.512689	9.868	9.570	50	8.512022	8.512645	0.717	0.416
1 10	8.509871	8.512688	0.014	9.716	6 10	8.512285	8.512640	0.741	0.441
30	8.509930	8.512687	0.123	9.823	30	8.512564	8.512634	0.765	0.464
50	8.510003	8.512686	0.211	9.912	50	8.512857	8.512629	0.787	0.486
2 10	8.510090	8.512684	0.283	9.985	7 10	8.513165	8.512622	0.808	0.506
30	8.510192	8.512682	0.346	0.047	30	8.513488	8.512616	0.828	0.526
50	8.510309	8.512679	0.400	0.102	50	8.513826	8.512609	0.848	0.546
3 10	8.510441	8.512677	0.449	0.150	8 10	8.514179	8.512602	0.866	0.564
30	8.510587	8.512674	0.492	0.193	30	8.514547	8.512595	0.884	0.581
50	8.510748	8.512671	0.532	0.233	50	8.514929	8.512588	0.902	0.598
4 10	8.510923	8.512667	0.569	0.269					
30	8.511114	8.512663	0.602	0.303					
50	8.511319	8.512659	0.634	0.334					

Achter al deze logarithmen moet gevoegd worden — 10.

Voorbeeld. Berekening van de geographische lengte en breedte van een driehoekspunt uit de rechthoekige coördinaten in de polyederprojectie.

Punt: Si Tindo Toba: *S* 100. Graadafdeeling: 1 $l_0 = 1^\circ 30'$ *W.* (*O.L.* + / *W.L.* −) Centraalpunt: $\varphi_0 = 2^\circ 30'$ *N.*				Punt *B.* Poenggoeng Lading: *S* 39. Graadafdeeling: 63 $l_0 = 0^\circ 30'$ *O.* (*O.L.* + / *W.L.* −) Centraalpunt: $\varphi_0 = 0^\circ 30'$ *Z.*			
x	+ 5074.71	y	− 4681.16	x	− 15777.38	y	− 8607.05
$\log A$	8.510192	$\log B$	8.512682	$\log A$	8.509930	$\log B$	8.512687
$\log x$	3.705411	$\log y$	3.670354n	$\log x$	4.198034n	$\log y$	3.934854n
$\log (1)$	2.215603	$\log (2)$	2.183036n	$\log (1)$	2.707964n	$\log (2)$	2.447541n
$\log C$	0.346	$\log D$	0.048	$\log C$	0.123	$\log D$	9.825
$\log x$	3.705	$\log x^2$	7.411	$\log x$	4.198n	$\log x^2$	8.396
$\log y$	3.670n	$\log (4)$	7.459	$\log y$	3.935n	$\log (4)$	8.221
$\log (3)$	7.721n			$\log (3)$	8.256		
+(1)	+ 164″.29	+(2)	− 152″.42	+(1)	− 510″.46	−(2)	+ 280″.25
+(3)	− 0 .01	−(4)	− 0 .00	−(3)	− 0 .02	−(4)	− 0 .02
λ	+ 2′44″.28	β	− 2′32″.42	λ	− 8′30″.48	β	+ 4′40″.23
l_0	−1°30′ 0 .00	φ_0	2°30′ 0 .00	l_0	+0°30′ 0 .00	φ_0	1°30′ 0 .00
l	1°27′15″.72 *W*	φ	2°27′27″.58 *N*	l	0°21′29″.52 *O*	φ	1°34′40″.23 *Z*

Voor nadere bijzonderheden over deze projectie zij verwezen naar het werkje: „Een en ander over kaartprojecties” door J. van Roon, uitgegeven door den Topographischen Dienst in Ned.-Indië.



Kaartje, toonende de waarde van $log \frac{1}{m_1}$ in eenheden van de zesde decimaal, met het teeken waarmede $log \frac{1}{m_1}$ moet worden toegepast op de *log* kaartafstand.

Br.	$log \frac{1}{r_p}$	$log \frac{1}{m}$	*log*
50°			
40′	3.285 528	8.510 079	8.70
41′	733	78	8.70
42′	938	76	
43′	3.286 143	75	
44′	348	74	
45′	553	73	
46′	759	72	
47′	964	70	8.70
48′	3.287 170	69	
49′	375	68	
50′	581	67	
51′	786	65	
52′	992	64	
53′	3.288 198	63	
54′	404	62	8.70
55′	610	60	
56′	816	59	
57′	3.289 022	58	
58′	228	57	
59′	434	55	
51°			
0′	3.289 640	8.510 054	8.710
1′	846	53	
2′	3.290 053	52	
3′	259	50	
4′	466	49	
5′	673	48	
6′	880	47	
7′	3.291 087	45	8.711
8′	293	44	
9′	500	43	
10′	707	42	
11′	914	40	
12′	3.292 121	39	
13′	328	38	8.712
14′	536	37	
15′	743	35	
16′	950	34	
17′	3.293 157	33	
18′	365	32	
19′	573	30	8.713
20′	781	8.510 029	
21′	988	28	
22′	3.294 196	27	
23′	404	25	
24′	612	24	
25′	820	23	
26′	3.295 028	22	8.714
27′	236	21	
28′	445	19	
29′	653	18	
30′	861	17	
31′	3.296 069	16	
32′	278	14	8.715
33′	487	13	
34′	696	12	
35′	904	11	
36′	3.297 113	09	
37′	322	08	
38′	531	07	8.716
39′	740	06	
40′	949	04	

Achter alle logarith
ondergaat; *m* de lengte
parallelstraal.

Br.	$log \frac{1}{r_p}$	$log \frac{1}{m}$	$log \frac{1}{p}$	Br.	$log \frac{1}{r_p}$	$log \frac{1}{m}$	$log \frac{1}{p}$
				52°			
	3.297 949	8.510 004	8.716 331	40'	3.310 629	8.509 931	8.726 068
	3.298 158	03	491	41'	842	30	233
	367	02	651	42'	3.311 056	29	398
	576	01	810	43'	270	27	564
	786	8.509 999	970	44'	484	26	730
	996	98	8.717 130	45'	698	25	895
	3.299 205	97	290	46'	912	23	8.727 061
	415	96	450	47'	3.312 126	22	227
	624	95	610	48'	340	21	393
	834	93	770	49'	554	20	559
	3.300 044	92	930	50'	768	18	725
	254	91	8.718 090	51'	982	17	891
	464	90	250	52'	3.313 197	16	8.728 058
	674	88	411	53'	411	15	224
	884	87	572	54'	626	13	391
	3.301 094	86	732	55'	841	12	558
	304	85	893	56'	3.314 056	11	724
	514	83	8.719 054	57'	271	10	891
	725	82	215	58'	486	09	8.729 058
	935	81	376	59'	701	07	225
				53°			
	3.302 146	8.509 980	8.719 538	0'	3.314 916	8.509 906	8.729 392
	356	79	699	1'	3.315 131	05	559
	567	77	861	2'	346	04	727
	778	76	8.720 022	3'	561	03	894
	989	75	184	4'	777	01	8.730 062
	3.303 200	74	346	5'	993	8.509 900	229
	411	72	507	6'	3.316 208	8.509 899	397
	622	71	669	7'	423	98	565
	833	70	831	8'	639	97	733
	3.304 014	69	993	9'	855	95	901
	256	68	8.721 155	10'	3.317 071	94	8.731 070
	467	66	318	11'	287	93	238
	678	65	480	12'	503	92	406
	890	64	643	13'	719	91	575
	3.305 101	63	805	14'	935	89	744
	313	61	968	15'	3.318 151	88	912
	525	60	8.722 131	16'	368	87	8.732 081
	737	59	294	17'	584	86	250
	949	58	457	18'	800	84	419
	3.306 161	57	620	19'	3.319 017	83	588
	373	8.509 955	783	20'	234	8.509 882	757
	585	54	946	21'	450	81	927
	797	53	8.723 110	22'	667	79	8.733 096
	3.307 009	52	273	23'	884	78	264
	221	50	437	24'	3.320 101	77	435
	434	49	600	25'	318	76	605
	646	48	764	26'	535	75	775
	858	47	928	27'	752	73	945
	3.308 071	45	8.724 092	28'	970	72	8.734 115
	284	44	256	29'	3.321 187	71	285
	497	43	420	30'	404	70	455
	710	42	585	31'	622	69	626
	923	41	749	32'	840	67	796
	3.309 136	39	913	33'	3.322 057	66	967
	349	38	8.725 078	34'	275	65	8.735 137
	562	37	243	35'	493	64	308
	775	36	408	36'	711	62	479
	988	34	572	37'	929	61	650
	3.310 202	33	737	38'	3.323 147	60	821
	416	32	903	39'	365	59	992
	629	31	8.726 068	40'	583	58	8.736 164

…et gevoegd worden: — 10. m_1 is de vergrooting welke de bolafstand in de kaart …ters van de breedtesecunde; p de lengte in meters van de lengtesecunde; r_p de